គណិតវិទ្យា

ពិភពជម្រើស លំហាត់ស៊ីត

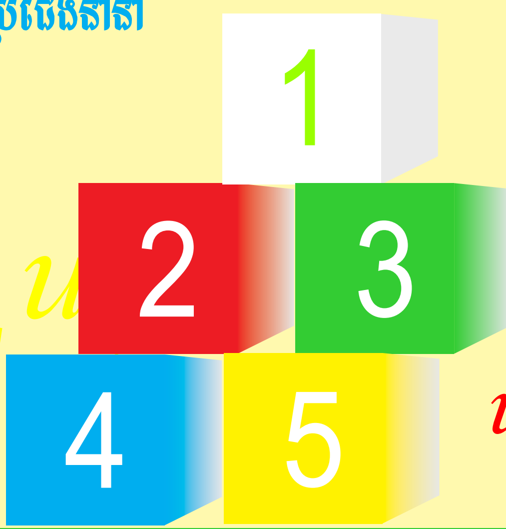
ភាគ១

សម្រាប់ប្រលង:

- សិស្សពូកែ
- អាហារូបករណ៍
- ការប្រលងប្រជែងនានា

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} u$$



$u_n = =$

រៀបរៀងដោយ ជា ពិសិដ្ឋ

<u>អារម្ភកថា</u>

សួស្តី ! ប្រិយមិត្តដែលកំពុងតែអានសៀវភៅ **ពិភពជម្រើស លំហាត់ស្ទឹតភាគ1** ជាទីគោរពរាប់អាន ។ សៀវភៅ **ពិភពជម្រើស លំហាត់ស្ទឹតភាគ 1** នេះត្រូវបានរៀបរៀងឡើងក្នុងគោលបំណងផ្តល់ជាឯកសារសម្រាប់ជំនួយដល់ការសិក្សាស្រាវជ្រាវ ជាពិសេសគឺ ស្វ័យសិក្សា ។

សៀវភៅនេះចែកចេញជាពីរផ្នែក គឺ ផ្នែក មេរៀនសង្ខេប និង លំហាត់ - ចម្លើយ ។ក្នុងផ្នែក *មេរៀនសង្ខេប* យើងខ្ញុំបានសង្ខេបយកគន្លឹះសំខាន់ៗក្នុងមេរៀនស្ទឹតចំនួនពិតដើម្បីរំលឹកឡើងវិញនូវបញ្ញាតិមួយចំនួនដល់មិត្តអ្នកអាន ។រីឯផ្នែក *លំហាត់ -ចម្លើយ* យើងខ្ញុំបានខិតខំជ្រើសរើសយកលំហាត់មួយចំនួនដូចជា លំហាត់ធ្លាប់ចេញ ប្រលងក្នុងប្រទេស និង បណ្តាលប្រទេសផ្សេងៗមកដាក់ជាចំណោទបញ្ហាសម្រាប់ អោយមិត្តអ្នកអានគិត និង វិភាគទៅលើលំហាត់ទាំងនោះ ព្រមទាំងមាននូវដំណោះ ស្រាយដែលយើងខ្ញុំបានធ្វើការបកស្រាយយ៉ាងក្បោះក្បាយដើម្បីអោយមិត្តអ្នកអានងាយស្រួលយល់ ។

ជាចុងក្រោយយើងខ្ញុំមានត្រឹមតែពាក្យជូនពរ ដល់អ្នកសិក្សាគ្រប់រូបអោយជួបប្រទះតែ សេចក្តីសុខចម្រើន សុខភាពល្អ និង ប្រកបដោយបញ្ញា ។យើងខ្ញុំក៏សូមអរគុណទុកជាមុនផងដែរ រាល់មតិរិះគន់របស់អ្នកសិក្សាគ្រប់រូបក្នុងន័យស្ថាបនា ព្រោះថាប្រាកដជាមានកំហុសឆ្គងណាមួយដោយអចេតនាជាមិនខាន ទាំងផ្នែកបច្ចេកទេស និង ការរៀបរៀង ។

ដោយការគោរពយ៉ាងជ្រាលជ្រៅពីអ្នករៀបរៀង ជា ពិសិដ្ឋ

ធ្វើនៅភ្នំពេញ, ថ្ងៃទី 9 ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ 2011

បច្ចេកទេសកុំព្យូទ័រ: **ឈុន ច័ន្ទរដ្ឋា**

ហេង វណ្ណា

ផ្នែកទីផ្សារ: **វង់ ខេមរិទ្ធិ**

ជួប ចន្ថា

ត្រួតពិនិត្យ: **សួង សូរិយា**

ហិរញ្ញវត្ថុ: **សំ សីហាឧត្តម**

ទូច រ៉ាឌី

រៀបរៀង និង និពន្ធដោយ: **ផា ពិសិដ្ឋ**

សង្ខេប ស្វ៊ីតចំនួនពិត

1. ស្វ៊ីតចំនួនពិត

ក. សញ្ញាណស្វ៊ីត

ស្វ៊ីត គឺជាអនុគមន៍លេខកំណត់ពីសំណុំ IN ទៅ IR ។

ខ. តួទី n នៃស្វ៊ីត

តួទី n នៃស្វ៊ីត គឺជាតួទូទៅនៃស្វ៊ីត ។

គ. អថេរភាពនៃស្វ៊ីត

- ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតកើន លុះត្រាតែ $a_{n+1} > a_n$ ចំពោះ $\forall n \in IN$ ។
- ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះ លុះត្រាតែ $a_{n+1} < a_n$ ចំពោះ $\forall n \in IN$ ។
- ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតថេរ លុះត្រាតែ $a_{n+1} = a_n$ ចំពោះ $\forall n \in IN$ ។

របៀបសិក្សាអថេរភាពនៃស្វ៊ីត

- បើ $a_{n+1} - a_n > 0$ នាំអោយ (a_n) ជាស្វ៊ីតកើន
- បើ $a_{n+1} - a_n < 0$ នាំអោយ (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះ
- បើ $a_{n+1} - a_n = 0$ នាំអោយ (a_n) ជាស្វ៊ីតថេរ

បើគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត (a_n) ជាចំនួនវិជ្ជមាន នោះគេអាចសិក្សាអថេរភាពនៃស្វ៊ីតបានតាមផលធៀប $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$:

- បើ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ នាំអោយ (a_n) ជាស្វ៊ីតកើន
- បើ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ នាំអោយ (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះ

- បើ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ នាំអោយ (a_n) ជាស្វ៊ីតថេរ

សម្គាល់: ស្វ៊ីតម៉ូណូតូនជាស្វ៊ីតកើន រឺ ស្វ៊ីតចុះ ។

ឃ. ស្វ៊ីតទាល់

- ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ លុះត្រាតែមានចំនួនពិត M ដែល $a_n \le M$ រឺ មានចំនួនពិត M មួយដែល a_n ខិតទៅជិតបំផុតតែមិនស្មើ $(a_n < M)$ $,\forall n \in IN$ ។ M ហៅថា គោលលើនៃស្វ៊ីត ។
- ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម លុះត្រាតែមានចំនួនពិត m ដែល $a_n \ge m$ រឺ មានចំនួនពិត m មួយដែល a_n ខិតទៅជិតបំផុតតែមិនស្មើ $(a_n > m)$ $,\forall n \in IN$ ។ m ហៅថា គោលក្រោមនៃស្វ៊ីត ។
- ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ លុះត្រាតែវាជាស្វ៊ីតទាល់លើផង និង ទាល់ក្រោម ផង ។

2. ស្វ៊ីតនព្វន្ត

ក. និយមន័យ

ស្វ៊ីតនព្វន្ត គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗក្រៅពីតួទី 1 ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់បូកនឹងចំនួនថេរ (d) ។ d ហៅថា ផលសងរួមនៃស្វ៊ីត រឺ រេសុង ។

ខ. តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន u_1 ជាតួទី 1 ហើយ d ជារេសុង ។ យើងបាន: តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n = u_1 + (n-1)d$ ។

តាមទំនាក់ទំនង $u_n = u_1 + (n-1)d$ （1）

យើងបាន: តួទី p នៃស្វ៊ីតគឺ $u_p = u_1 + (p-1)d$

នាំអោយ $u_1 = u_p - (p-1)d$ (2)

តាម (1), (2) យើងបាន: $u_n = u_p + (n-p)d$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d \text{ ឬ } u_n = u_p + (n-p)d}$

n , p ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

គ. តួស្មើចម្ងាយពីតួចុង

ជាទូទៅ: ចំពោះ $p \le n$ គេបាន u_{n-p+1} និង u_p ជាគូតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង ។

$$\underbrace{u_1, u_2, u_3, ..., u_p}_{p}, ..., \underbrace{u_{n-p+1}, ..., u_{n-2}, u_{n-1}, u_n}_{p}$$ ។

ឃ. ផលបូកតួស្មើចម្ងាយពីចុង និង តួចុង

ជាទូទៅ: ផលបូកតួស្មើចម្ងាយពីតួចុងមានតម្លៃស្មើនឹងផលបូកតួចុងទាំងពីរ:

$$u_{n-p+1} + u_p = u_1 + u_n$$ ។

ករណីពិសេស: បើ a , b , c ជាបីតួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ យើងបាន:

$$2b = a + c$$ ។ b ហៅថា មធ្យមនព្វន្តនៃ a និង c ។

ង. ផលបូកស្វ៊ីតនព្វន្ត

បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន: u_1 ជាតួទី 1 , d ជារេសុង ហើយ n ជាចំនួនតួ ។ ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) \text{ ឬ } S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$$ ។

3. ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ក. និយមន័យ

ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗក្រៅពីតួទី 1 ស្មើនឹងតួមុន

បន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរ ($q \neq 0$) ។ q ហៅថា ផលធៀបរួម រឺ រេសុង ។

ខ. តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន u_1 ជាតួទី 1 , q ជារេសុង ។ តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n = u_1 q^{n-1}$ ។

តាមទំនាក់ទំនង $u_n = u_1 q^{n-1}$ (1)

តួទី p នៃស្វ៊ីតគឺ $u_p = u_1 q^{p-1}$ (2)

ធ្វើផលធៀបរវាង (1) និង (2) យើងបាន៖ $u_n = u_p q^{n-p}$ ។

ដូចនេះ $u_n = u_1 q^{n-1}$ រឺ $u_n = u_p q^{n-p}$

គ. ផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង

ជាទូទៅ៖ ផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុងស្មើនឹងផលគុណតួចុងទាំងពីរ៖

$$u_p \times u_{n-p+1} = u_1 \times u_n \quad (p \leq n) \text{ ។}$$

ករណីពិសេស៖ បើ a , b , c ជាបីតួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ យើងបាន៖

$b^2 = ac$ ។b ហៅថា មធ្យមធរណីមាត្រនៃ a , c ។

ឃ. ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន u_1 ជាតួទី 1 , q ជារេសុង ។ ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $S_n = \dfrac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$ ។

ង. ផលគុណ n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន u_1 ជាតួទី 1 , u_n ជាតួទី n ។ ផលគុណ n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $P = \sqrt{(u_1 \cdot u_n)^n}$ ។

ច. ផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

ផលបូកអនន្តតួនៃស្វ៊ីត (u_n) ដែល $|q|<1$ កំណត់ដោយ $S_\infty=\frac{u_1}{1-q}$ ។ តែបើ $|q|\ge 1$ យើងមិនអាចកំណត់ផលបូកអនន្តតួនៃស្វ៊ីត (u_n) បានឡើយ ។

សម្គាល់: ការពិត S_∞ មិនស្មើនឹង $\frac{u_1}{1-q}$ ទេ ប៉ុន្តែតម្លៃរបស់ S_∞ គឺជាចំនួនក្បែរៗនឹង $\frac{u_1}{1-q}$ បំផុត ។ ហេតុនេះទើបគេសន្មតយក $S_\infty=\frac{u_1}{1-q}$ ។

4. ផលបូកផ្សេងៗនៃស្វ៊ីត

ក. និមិត្តសញ្ញា $\sum$ សម្រាប់ផលបូកស្វ៊ីត

ដើម្បីអោយមានលក្ខណៈងាយស្រួលក្នុងការសរសេរ វី គណនាគេបានប្រើនិមិត្តសញ្ញា $\sum$ （អានថា ស៊ិច ម៉ា）សម្រាប់តាងផលបូកនៃស្វ៊ីត ។

ជាទូទៅ: $S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$ ។

ខ. លក្ខណៈនៃផលបូក

ផលបូកមានលក្ខណៈដូចខាងក្រោម:

ក. $\sum_{k=1}^{n}c=nc$ ខ. $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$

គ. $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

ឃ. $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

ង. $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

គ. រូបមន្តផលបូកផ្សេងៗ

ក. $1+2+3+\ldots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

ខ. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

គ. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\sum_{k=1}^{n} k=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

សម្គាល់: សូមចង់ចាំរូបមន្តខាងលើនេះ ដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការធ្វើលំហាត់ ។

5. របៀបកំណត់តួទី n តាមផលសងតួស៊ីត

បើគេមានស៊ីត (a_n): $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ និង (b_n): $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ ហើយ $b_1=a_2-a_1$, $b_2=a_3-a_2$, ..., $b_n=a_{n+1}-a_n$ ។ (b_n) ហៅថាស៊ីតផលសងតួលំដាប់ទី1 នៃស៊ីត (a_n) ។ យើងបាន: $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ។

ស៊ីតផលសងតួលំដាប់ទី2 នៃស៊ីត (a_n) គឺ ជាស៊ីតផលសងតួលំដាប់ទី1 នៃស៊ីត (b_n) ។

6. ទំនាក់ទំនងតួនៃស៊ីត

ក. កំណត់តួទី n ដោយប្រើស៊ីតជំនួយសម្រាប់ទំនាក់ទំនងកំណើនទម្រង់

$a_{n+1}=pa_n+f(n)$

គេមានស៊ីត (a_n) ដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនង $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ $(p\neq 1)$ ។

ស៊ីតជំនួយនៃស៊ីត (a_n) គឺស៊ីត (r_n) ដែល r_n មានរាងទៅតាមអនុគមន៍ $f(n)$ ។

ឧទាហរណ៍: ស៊ីត (a_n) មួយកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន:

$$a_{n+1}=2a_n+n+1 \text{ ។}$$

នាំអោយ $f(n)=n+1$ យើងបាន: $r_n = an+b$ (a,b ជាចំនួនថេរ) ។

សម្គាល់: ស្វ៊ីតជំនួយ (r_n) ជាស្វ៊ីតផ្សេងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើននៃស្វ៊ីត (a_n) ។

ឧទាហរណ៍: បើ (r_n) ជាស្វ៊ីតជំនួយនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលមានទំនាក់ទំនងកំណើន

$a_{n+1} = 2a_n + n + 1$ នាំអោយ $r_{n+1} = 2r_n + n + 1$

(របៀបនៃការរកតួទី n ដោយប្រើស្វ៊ីតជំនួយសូមមើលលំហាត់ទី24)

ខ. ទំនាក់ទំនង a_n **និង** S_n

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន: $S_n - S_{n-1} = a_n$ ហើយ $a_1 = S_1$ ។

គ. ទំនាក់ទំនងកំណើនរាង $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$

គេពិចារណាទៅលើពីរចំនួន α , β ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\alpha + \beta = -p$,

$\alpha\beta = q$ ។ គេបាន: $a_{n+2} - (\alpha+\beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះអាចបំលែងទៅជា:

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) & (1) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) & (2) \end{cases}$$

តាម (1) និង (2) យើងបានស្វ៊ីតធរណីមាត្រពីរ $(u_n),(v_n)$ គឺ

$$\begin{cases} a_{n+1} - \alpha a_n = v_n \\ a_{n+1} - \beta a_n = u_n \end{cases}$$

ដកអង្គ និង អង្គនៃសមីការទាំងពីររបស់ប្រព័ន្ធសមីការគេនឹងទទួលបាន a_n ។

សម្គាល់: គេអាចរក α , β ដោយដោះស្រាយសមីការ $x^2 + px + q = 0$ ។

សមីការ $x^2 + px + q = 0$ ហៅថា សមីការសម្គាល់នៃ

$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ ។

7. វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ក. គោលការណ៍នៃវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

$P(n)$ ជាសំណើដែលទាក់ទងនឹងចំនួនគត់ ។ ដើម្បីស្រាយថា $P(n)$ ពិតចំពោះ $\forall n \in IN$ ។ យើងត្រូវៈ

❶ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P(n)$ ពិតចំពោះ $n=1$ ។

❷ ឧបមាថា $P(n)$ ពិតដល់ k គឺ $P(k)$ ពិត ។

❸ ស្រាយថា $P(k)$ នាំអោយ $P(k+1)$ ពិត ។

ខ. ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r) x^{n-r} y^r = C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y^1 + ... + C(n,n)y^n$$

លំហាត់

1. គេអោយស្វ៊ីត (a_n): $1\,,\,-2\,,\,3\,,\,-4\,,\,5\,,\,.\,.\,.\,.\,,\,n(-1)^{n+1}$ ។
   តើមធ្យមភាគ 200 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) ស្មើប៉ុន្មាន ?

ចម្លើយ

- គណនាមធ្យមភាគ 200 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n)

  យើងមាន៖ (a_n): $1\,,\,-2\,,\,3\,,\,-4\,,\,5\,,\,.\,.\,.\,.\,,\,n(-1)^{n+1}$

  នាំអោយ $a_n = n(-1)^{n+1}$ មធ្យមភាគ 200 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{200}}{200}$$

$$= \frac{1-2+3-4+5-6+....+199-200}{200}$$

$$= \frac{(1-2)+(3-4)+(5-6)+....+(199-200)}{200}$$

$$= \frac{-1-1-1-1-...-1-1-1}{200}$$ ផលដកលេខ 1 ចំនួន 100 ដង

$$= -\frac{100}{200} = -\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ មធ្យមភាគ 200 *តួដំបូងនៃស្វ៊ីត* (a_n) *គឺ* $A = -\frac{1}{2}$

2. គេអោយស្វ៊ីត (u_n) មួយកំណត់ដោយ $u_0 = 1\,,\,u_1 = 2$ ហើយ
   $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{u_{n-1}}$ ចំពោះ $n \geq 1$ ។
   ក. គណនា u_2
   ខ. ស្រាយថា៖ $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$ ចំពោះ $n \geq 1$ ។

ចម្លើយ

ក. គណនា u_2

យើងមាន: $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+1}{u_{n-1}}$

បើ $n=1$ នាំអោយ $u_2=\dfrac{u_1^2+1}{u_0}$ ដោយ $u_0=1$, $u_1=2$

$$\text{នាំអោយ } u_2=\frac{2^2+1}{1}=5$$

ដូចនេះ $u_2=5$

ខ. ស្រាយថា: $u_{n+1}=3u_n-u_{n-1}$

យើងមាន: $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+1}{u_{n-1}}$

នាំអោយ $u_{n+1}u_{n-1}=u_n^2+1$

នាំអោយ $u_{n+1}u_{n-1}-u_n^2=1$ យក $a_n=u_{n+1}u_{n-1}-u_n^2$

នាំអោយ (a_n) ជាស៊្វីតថេរ យើងបាន: $a_{n+1}=a_n$

នាំអោយ $u_{n+2}u_n-u_{n+1}^2=u_{n+1}u_{n-1}-u_n^2$

នាំអោយ $u_{n+2}u_n+u_n^2=u_{n+1}u_{n-1}+u_{n+1}^2$

នាំអោយ $(u_{n+2}+u_n)u_n=u_{n+1}(u_{n-1}+u_{n+1})$

នាំអោយ $\dfrac{u_{n+2}+u_n}{u_{n+1}}=\dfrac{u_{n+1}+u_{n-1}}{u_n}$

តាង $b_n=\dfrac{u_{n-1}+u_{n+1}}{u_n}$ នាំអោយ $b_{n+1}=b_n$

យើងបាន: (b_n) ជាស៊្វីតថេរ នាំអោយ $b_{n+1}=b_n=...=b_1$

ដោយ $b_1 = \dfrac{u_0 + u_2}{u_1} = \dfrac{1+5}{2} = 3$

នាំអោយ $\dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{u_n} = 3$

នាំអោយ $u_{n-1} + u_{n+1} = 3u_n$

ដូចនេះ $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$

3. គេអោយបីចំនួនបឋម p , q , r ។ ស្រាយថា $\sqrt[3]{p}$, $\sqrt[3]{q}$, $\sqrt[3]{r}$ មិនមែនជាបីតួ (មិនចាំបាច់តែជាតួបន្តបន្ទាប់គ្នាទេ) នៃស្វីតនព្វន្តណាមួយឡើយ ។

<u>ចម្លើយ</u>

- ស្រាយថា $\sqrt[3]{p}$, $\sqrt[3]{q}$, $\sqrt[3]{r}$ មិនមែនជាបីតួនៃស្វីតនព្វន្តណាមួយ

ឧបមាថា: $\sqrt[3]{p}$, $\sqrt[3]{q}$, $\sqrt[3]{r}$ ជាបីតួនៃស្វីតនព្វន្តណាមួយ

បើ $\sqrt[3]{p} = a$ នាំអោយ $\sqrt[3]{q} = a + bd$, $\sqrt[3]{r} = a + cd$ ($b, c \in \mathbf{Z}$)

យើងបាន: $d = \dfrac{\sqrt[3]{q} - \sqrt[3]{p}}{b}$ (1)

$d = \dfrac{\sqrt[3]{r} - \sqrt[3]{p}}{c}$ (2)

តាម (1) និង (2): $\dfrac{\sqrt[3]{q} - \sqrt[3]{p}}{b} = \dfrac{\sqrt[3]{r} - \sqrt[3]{p}}{c}$

នាំអោយ $c\left(\sqrt[3]{q} - \sqrt[3]{p}\right) = b\left(\sqrt[3]{r} - \sqrt[3]{p}\right)$

នាំអោយ $(b - c)\sqrt[3]{p} = b\sqrt[3]{r} - c\sqrt[3]{q}$

យក $x = b - c \in \mathbf{Z}$ ព្រោះ ($b, c \in \mathbf{Z}$)

នាំអោយ $x\sqrt[3]{p} = b\sqrt[3]{r} - c\sqrt[3]{q}$ លើកអង្គទាំងពីរជាគូប

នាំអោយ $px^3 = rb^3 - qc^3 - 3b^2c\sqrt[3]{r^2q} + 3bc^2\sqrt[3]{rq^2}$ (3)

ដោយ p , q , r ជាបីចំនួនបឋមផ្សេងគ្នា

នាំអោយ $px^3 \in Q$ ហើយ $rb^3 - qc^3 - 3b^2c\sqrt[3]{r^2q} + 3bc^2\sqrt[3]{rq^2} \notin Q$

ហេតុនេះ（3）មិនពិត

នាំអោយ ការឧបមាមិនពិត

ដូចនេះ $\sqrt[3]{p}$, $\sqrt[3]{q}$, $\sqrt[3]{r}$ មិនមែនជាបីតួនៃស្វីតនព្វន្តណាមួយ

4. ក. គេអោយ x , y , z ជាបីតួបន្តគ្នានៃស្វីតនព្វន្តមួយ ។ ដោយដឹងថា

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+xz=11 \end{cases}$$ ។ កំណត់ x , y , z ។

ខ. គេអោយ x , y , $z \in IN$ ជាបីតួបន្តគ្នានៃស្វីតនព្វន្តមួយ ។

កំណត់ x , y , z ដោយដឹងថា $x+y+z=xyz$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក. កំណត់ x , y , z

យើងមាន: x , y , z ជាបីតួបន្តគ្នានៃស្វីតនព្វន្ត

នាំអោយ $x = y - d$, $z = y + d$ （ d ជាផលសងរួមនៃស្វីត ）

ដោយ $$\begin{cases} x+y+z=6 & (1) \\ xy+yz+zx=11 & (2) \end{cases}$$

ពី（1）: $x+y+z=6$ នាំអោយ $y-d+y+y+d=6$

នាំអោយ $y=2$

នាំអោយ $x+z=4$ （3）

ពី（2）: $xy+yz+zx=11$ នាំអោយ $y(x+z)+xz=11$

នាំអោយ $2(4)+xz=11$

នាំអោយ $xz = 3$ （4）

តាម（3），（4）: x , z គឺជាឫសរបស់សមីការ $X^2 - 4X + 3 = 0$

ដោយ $a+b+c=0$ នាំអោយ $X_1 = 1$, $X_2 = 3$

យើងបាន: $x = 1$, $z = 3$ ឬ $x = 3$, $z = 1$

ដូចនេះ （$x = 1$, $y = 2$, $z = 3$），（$x = 3$, $y = 2$, $z = 1$）

ខ. កំណត់ x , y , z

យើងមាន: $x + y + z = xyz$ ដោយ x , y , z ជាបីតួបន្តគ្នានៃស្វីតនព្វន្ត

នាំអោយ $x + z = 2y$ យើងបាន: $xyz = 3y$ ឬ $xz = 3$

តែ x , $z \in IN$ នាំអោយ $x = 1$, $z = 3$ ឬ $x = 3$, $z = 1$

បើ $x = 1$, $z = 3$ នាំអោយ $y = 2$

បើ $x = 3$, $z = 1$ នាំអោយ $y = 2$

ដូចនេះ （$x = 1$, $y = 2$, $z = 3$），（$x = 3$, $y = 2$, $z = 1$）

5. គេអោយស្វីតនព្វន្ត 2 , 7 , 12 , . . . និង ស្វីតនព្វន្ត 2 , 5 , 8 , . . . ។
តើក្នុងចំណោម121តួដំបូងនៃស្វីតទាំងពីរនេះមានប៉ុន្មានតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា ?

<u>ចម្លើយ</u>

- រកចំនួនតួនៃតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នារវាងស្វីតទាំងពីរក្នុងចំណោម 121 តួ

របៀបទី 1

តាង $(a_n): 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, ...$

ជាស្វីតនព្វន្តមាន: $a_1 = 2$, $d_1 = 5$

$(b_n): 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, ...$

ជាស្ទីតនព្វន្តមានៈ $b_1 = 2$, $d_2 = 3$

យើងបានៈ $a_n \geq b_n$

យក (c_m) ជាស្ទីតដែលកើតឡើងដោយសារតួមានតម្លៃស្មើនៃ (a_n) និង (b_n)

យើងបានៈ (c_m) : $2,17,32,...$ ជាស្ទីតនព្វន្តមាន $c_1 = 2$, $d_3 = 15$

នាំអោយ $c_m = 2 + 15(m-1)$

នាំអោយ $c_m = 15m - 13$

ដោយគ្រប់តួនៃស្ទីត (c_m) ត្រូវតូចជាងរឺ ស្មើតួទី 121 នៃ (b_n)

យើងបានៈ $c_m \leq b_{121}$

រឺ $15m - 13 \leq b_1 + 120d_2$

រឺ $15m - 13 \leq 2 + 120 \cdot 3$

រឺ $15m - 13 \leq 362$

រឺ $15m \leq 375$

រឺ $m \leq 25$ នាំអោយ (c_m) មាន 25 តួ

ដូចនេះ ក្នុងចំណោម 121 *តួដំបូងនៃស្ទីតទាំងពីរមានតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា* 25 *តួ*

របៀបទី 2

តាង (a_n): 2 , 7 , 12 , . . . ជាស្ទីតនព្វន្តមានៈ $a_1 = 2$, $d_1 = 5$

នាំអោយ $a_n = a_1 + (n-1)d_1 = 2 + 5(n-1) = 5n - 3$

នាំអោយ $a_n = 5n - 3$

(b_m): 2 , 5 , 8 , . . . ជាស្ទីតនព្វន្តមានៈ $b_1 = 2$, $d_2 = 5$

នាំអោយ $b_m = b_1 + (m-1)d_2 = 2 + 3(m-1) = 3m - 1$

នាំអោយ $b_m = 3m - 1$

តួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នារវាងស្វីត (a_n), (b_m) គឺ ជាតួទី n , m រៀងគ្នានៃស្វីត (a_n), (b_m) ដែល $a_n = b_m$

យើងបាន៖ $5n - 3 = 3m - 1$

រឺ $m = \dfrac{5n-2}{3} = 2n - \dfrac{n+2}{3}$ ដោយ $n, m \in IN$

នាំអោយ $n + 2 = 3t$

នាំអោយ $n = 3t + 2$

នាំអោយ $m = 2(3t-2) - \dfrac{3t}{3} = 5t - 4$

ចម្លើយនៃសមីការ៖ $a_n = b_m$ គឺ $\begin{cases} n = 3t - 2 & (1) \\ m = 5t - 4 & (2) \end{cases}$

ដោយ $1 \le n, m \le 121$ ព្រោះ យើងរកតួដែលមានតម្លៃស្មើនៃស្វីត (a_n) , (b_m) ក្នុងចំណោម 121 តួដំបូង

ពី (1)៖ $n = 3t - 2$ នាំអោយ $1 \le 3t - 2 \le 121$

នាំអោយ $1 \le t \le 41$ (3)

ពី (2)៖ $m = 5t - 4$ នាំអោយ $1 \le 5t - 4 \le 121$

នាំអោយ $1 \le t \le 25$ (4)

តាម (3) និង (4)៖ $1 \le t \le 25$

នាំអោយ m, n មាន 25 ចំនួន

ដូចនេះ ក្នុងចំណោម 121 *តួដំបូងនៃស្វីតទាំងពីរមានតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា* 25 *តួ*

6. គេអោយ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលសងរួម d ។ ស្រាយថា:

$$\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}+\frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}=\frac{\sqrt{u_n}-\sqrt{u_1}}{d}$$ ។

ចម្លើយ

- ស្រាយថា $\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}+\frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}=\frac{\sqrt{u_n}-\sqrt{u_1}}{d}$

យក $S=\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}+\frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}$

យើងមាន: $\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}=\frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_1}}=\frac{\sqrt{u_2}-\sqrt{u_1}}{u_2-u_1}$

$$\frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}}=\frac{1}{\sqrt{u_3}+\sqrt{u_2}}=\frac{\sqrt{u_3}-\sqrt{u_2}}{u_3-u_2}$$

....

$$\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}=\frac{1}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{n-1}}}=\frac{\sqrt{u_n}-\sqrt{u_{n-1}}}{u_n-u_{n-1}}$$

នាំអោយ $S=\frac{\sqrt{u_2}-\sqrt{u_1}}{u_2-u_1}+\frac{\sqrt{u_3}-\sqrt{u_2}}{u_3-u_2}+...+\frac{\sqrt{u_n}-\sqrt{u_{n-1}}}{u_n-u_{n-1}}$

ដោយ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នាំអោយ $u_2-u_1=u_3-u_2=...=u_n-u_{n-1}=d$

នាំអោយ $S=\frac{\sqrt{u_2}-\sqrt{u_1}+\sqrt{u_3}-\sqrt{u_2}+...+\sqrt{u_n}-\sqrt{u_{n-1}}}{d}$

នាំអោយ $S=\frac{\left(\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}+...+\sqrt{u_n}\right)-\left(\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}+...+\sqrt{u_{n-1}}\right)}{d}$

នាំអោយ $S=\frac{\sqrt{u_n}-\sqrt{u_1}}{d}$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}=\dfrac{\sqrt{u_n}-\sqrt{u_1}}{d}$

7. គេអោយស្វ៊ីត (u_n): $\log_2 3\,,\ \log_2 6\,, \log_2 12\,, \log_2 24\,,\ \ldots$ ។

គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

<u>ចម្លើយ</u>

- គណនា S_n

របៀបទី 1

យើងមាន: (a_n): $\log_2 3\,,\ \log_2 6\,, \log_2 12\,, \log_2 24\,, \ldots$

ដោយ $\log_2 6-\log_2 3=\log_2\left(\dfrac{6}{3}\right)=\log_2 2=1$

$\log_2 12-\log_2 6=\log_2\left(\dfrac{12}{6}\right)=\log_2 2=1$

នាំអោយ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមាន $a_1=\log_2 3\,,\ d=1$

នាំអោយ $S_n=\dfrac{n}{2}\left[2u_1+(n-1)d\right]$

នាំអោយ $S_n=\dfrac{n}{2}\left(2\log_2 3+n-1\right)$

នាំអោយ $S_n=n\log_2 3+\dfrac{n(n-1)}{2}$

ដូចនេះ $S_n=\log_2 3^n+\dfrac{n(n-1)}{2}$

របៀបទី 2

យើងមាន: $\log_2 3=\log_2 3\cdot 2^0=\log_2 3+0$

$\log_2 6=\log_2 3\cdot 2^1=\log_2 3+1$

$\log_2 3=\log_2 3\cdot 2^2=\log_2 3+2$

....

នាំអោយ $\log_2 3\cdot 2^{n-1} = \log_2 3 + (n-1)$

នាំអោយ $S_n = n\log_2 3 + [1+2+3+...+(n-1)]$

ដោយ $1+2+3+...+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

នាំអោយ $S_n = n\log_2 3 + \dfrac{n(n-1)}{2}$

ដូចនេះ $S_n = \log_2 3^n + \dfrac{n(n-1)}{2}$

របៀបទី 3

យើងមាន: (a_n): $\log_2 3$, $\log_2 6$, $\log_2 12$, $\log_2 24$, ...

ដោយ 3 , 6 , 12 , 24 , . . . ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន: $u_1 = 3$, $q = 2$

នាំអោយ $u_n = 3\cdot 2^{n-1}$

នាំអោយ តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ $a_n = \log_2 3\cdot 2^{n-1}$

នាំអោយ $S_n = \log_2 3 + \log_2 6 + \log_2 12 + ... + \log_2 3\cdot 2^{n-1}$

$= \log_2 \left[3\cdot 6\cdot 12\cdot 24\cdot ...\cdot \left(3\cdot 2^{n-1}\right)\right]$

តែ $3\cdot 6\cdot 12\cdot 24\cdot ...\cdot\left(3\cdot 2^{n-1}\right)$ ជាផលគុណស្វ៊ីតធរណីមាត្រ n តួដែលមាន:

$u_1 = 3$, $u_n = 3\cdot 2^{n-1}$

នាំអោយ $3\cdot 6\cdot 12\cdot 24\cdot ...\cdot\left(3\cdot 2^{n-1}\right) = \sqrt{\left(3\cdot 3\cdot 2^{n-1}\right)^n} = 3^n\cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

យើងបាន: $S_n = \log_2\left[3^n\cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\right] = \log_2 3^n + \dfrac{n(n-1)}{2}$

ដូចនេះ $S_n = \log_2 3^n + \dfrac{n(n-1)}{2}$

៨. គណនាផលបូក

ក. $A=7+77+777+...+\underbrace{777...+777}_{n}$

ខ. $S=1+2x+3x^2+...+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}$

<u>ចម្លើយ</u>

- គណនាផលបូក

ក. $A=7+77+777+...+\underbrace{777...+777}_{n}$

យើងមាន: $A=7+77+777+...+\underbrace{777...+777}_{n}$

នាំអោយ $\frac{9}{7}A=9+99+999+9999+\cdots+\underbrace{999...999}_{n}$

$$=10-1+10^2-1+10^3-1+\cdots+10^n-1$$

$$=10+10^2+10^3+10^4+\cdots 10^n-n$$

$$=\frac{10(10^n-1)}{9}-n$$

$$=\frac{10^{n+1}-9n-10}{9}$$

នាំអោយ $A=\frac{7}{81}\left(10^{n+1}-9n-10\right)$

ដូចនេះ $A=\frac{7}{81}\left(10^{n+1}-9n-10\right)$

ខ. $S=1+2x+3x^2+...+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}$

របៀបទី 1

តាង $S=1+2x+3x^2+\cdots+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}$

នាំអោយ $xS = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^{n-1} + nx^n$

នាំអោយ $S - xS = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} - nx^n$

តាមរូបមន្ត $S_n = \dfrac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$

យើងបាន: $S - xS = \dfrac{x^n - 1}{x - 1} - nx^n$

$$= \frac{x^n - 1 - nx^{n+1} + nx^n}{x - 1}$$

$$= \frac{-nx^{n+1} + (nx^n + x^n) - 1}{x - 1}$$

$$S(1 - x) = \frac{-nx^{n+1} + (n+1)x^n - 1}{x - 1}$$

នាំអោយ $S = \dfrac{nx^{n+1} - x^n(n+1) + 1}{(x-1)^2}$

ដូចនេះ $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1}$

$$= \frac{nx^{n+1} - x^n(n+1) + 1}{(x-1)^2}$$

របៀបទី 2

យើងមាន:

$$\begin{cases} 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}=\dfrac{x^n-1}{x-1} \\ x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}=\dfrac{x^n-x}{x-1} \\ x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}=\dfrac{x^n-x^2}{x-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{n-1}=\dfrac{x^n-x^{n-1}}{x-1} \end{cases}$$

នាំអោយ $1+2x+3x^2+\cdots+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}$

$$=\frac{nx^n-\left(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}\right)}{x-1}$$

$$=\frac{nx^n-\dfrac{x^n-1}{x-1}}{x-1}$$

$$=\frac{nx^{n+1}-nx^n-x^n+1}{(x-1)^2}$$

ដូចនេះ $1+2x+3x^2+\cdots+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}$

$$=\frac{nx^{n+1}-x^n(n+1)+1}{(x-1)^2}$$

របៀបទី 3

តាង $f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+x^n$

នាំអោយ $f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}$ （1）

ដោយ $f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+x^n$

$$=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

នាំអោយ $f'(x)=\dfrac{\left(x^{n+1}-1\right)'(x-1)-\left(x^{n+1}-1\right)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$$=\frac{x^n(n+1)(x-1)-x^{n+1}+1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{nx^{n+1}-nx^n+x^{n+1}-x^n-x^{n+1}+1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{nx^{n+1}-nx^n-x^n+1}{(x-1)^2}$$

នាំអោយ $f'(x)=\dfrac{nx^{n+1}-x^n(n+1)+1}{(x-1)^2}$ （2）

តាម（1）និង（2）យើងបាន:

$$1+2x+3x^2+\cdots+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}=\frac{nx^{n+1}-x^n(n+1)+1}{(x-1)^2}$$

ដូចនេះ $1+2x+3x^2+\cdots+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}$

$$=\frac{nx^{n+1}-x^n(n+1)+1}{(x-1)^2}$$

9.បើ x_1 , x_2 , x_3 ជាឫសរបស់សមីការដឺក្រេទី 3 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ។

ស្រាយថាបញ្ជាក់ថា: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$ ។

អនុវត្តន៍: កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង a , b , c ដោយដឹងថា x_1 , x_2 , x_3 ជាឫសរបស់សមីការ $x^3+ax^2+bx+c=0$ រៀបបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

ចម្លើយ

- ស្រាយថាបញ្ជាក់ថា: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$

យើងមាន: x_1 , x_2 , x_3 ជាឫសរបស់សមីការ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ (1)

យើងបាន: $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$

ឬ $ax^3-a(x_1+x_2+x_3)x^2+a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-ax_1x_2x_3=0$

ផ្ទឹមមេគុណជាមួយសមីការ (1) យើងបាន:

$\begin{cases} a(x_1+x_2+x_3)=-b \\ a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=c \\ ax_1x_2x_3=-d \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$

ដូចនេះ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$

អនុវត្តន៍: កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង a , b , c

សមីការ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ មាន: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-a & (1) \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b & (2) \\ x_1x_2x_3=-c & (3) \end{cases}$

ដោយ x_1 , x_2 , x_3 ជាបីតួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ

នាំអោយ $x_1 + x_3 = 2x_2$

ពី (1): $x_1 + x_2 + x_3 = -a$ នាំអោយ $x_2 = -\frac{a}{3}$

ពី (3): $x_1 x_2 x_3 = -c$ នាំអោយ $x_1 x_3 = \frac{3c}{a}$

ពី (2): $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$ រឺ $(x_1 + x_3)x_2 + x_3x_1 = b$

ដោយ $x_1 + x_3 = 2x_2 = -\frac{2a}{3}$, $x_1x_3 = \frac{3c}{a}$

យើងបាន: $-\frac{a}{3}\left(-\frac{2}{3}a\right) + \frac{3c}{a} = b$

នាំអោយ $\frac{2a^2}{9} + \frac{3c}{a} = b$

នាំអោយ $2a^3 + 27c = 9ab$

ដូចនេះ $2a^3 + 27c = 9ab$

10. គេអោយស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។ ដោយយក $S_n = nx$, $d = 2r$ ។

គណនា u_1 ជាអនុគមន៏នៃ n , x , r ។

អនុវត្តន៏:

ក. កំណត់បួនចំនួនជាតួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។ បើផលបូករបស់វាស្មើនឹង 16 ហើយផលគុណរបស់វាស្មើនឹង 105 ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីអោយរឹសទាំងបួនរបស់សមីការ:

$x^4 - (3m+4)x^2 + (m+1)^2 = 0$ រៀបបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។

<u>ចម្លើយ</u>

- គណនា u_1 ជាអនុគមន៍នៃ n , x , r

យើងមាន: (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នាំអោយ $S_n = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right]$

ដោយ $S_n = nx$, $d = 2r$ នាំអោយ $\frac{n}{2}\left[2u_1 + 2r(n-1)\right] = nx$

នាំអោយ $u_1 + r(n-1) = x$

នាំអោយ $u_1 = x - r(n-1)$

ដូចនេះ $u_1 = x - r(n-1)$

អនុវត្តន៍:

ក. គណនាបួនចំនួននោះ

ដោយបួនចំនួននោះ ជាតួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ

ហេតុនេះ យើងអាចតាងតួទី 1 នៃចំនួននោះដោយ

$u_1 = x - r(n-1) = x - 3r$ ព្រោះ $n = 4$

យើងបាន: បីចំនួនទៀតគឺ $u_2 = x - r$, $u_3 = x + r$,$u_4 = x + 3r$

យើងមាន: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 & (1) \\ u_1u_2u_3u_4 = 105 & (2) \end{cases}$

ពី (1): $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16$

នាំអោយ $x - 3r + x - r + x + r + x + 3r = 16$

នាំអោយ $x = 4$

ពី (2): $u_1u_2u_3u_4 = 105$

នាំអោយ $(x-3r)(x-r)(x+r)(x+3r) = 105$

នាំអោយ $(x^2 - 9r^2)(x^2 - r^2) = 105$

នាំអោយ $x^4 - 10x^2r^2 + 9r^4 = 105$ ដោយ $x = 4$

នាំអោយ $9r^4 - 160r^2 + 151 = 0$ យក $X = r^2$

នាំអោយ $9X^2 - 160X + 151 = 0$ មាន $\Delta' = 6400 - 1359 = 5041$

សមីការមានរឹស $X_1 = \dfrac{80 + \sqrt{5041}}{9} = \dfrac{80 + 71}{9} = \dfrac{151}{9}$

$$X_2 = \frac{80 - \sqrt{5041}}{9} = \frac{80 - 71}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

បើ $X = \dfrac{151}{9}$ នាំអោយ $r^2 = \dfrac{151}{9}$

នាំអោយ $r = \pm\dfrac{\sqrt{151}}{3}$

ចំនួនទាំងបួននោះគឺ $4 \mp \sqrt{151}$, $4 \mp \dfrac{\sqrt{151}}{3}$, $4 \pm \dfrac{\sqrt{151}}{3}$, $4 \pm \sqrt{151}$

បើ $X = 1$ នាំអោយ $r^2 = 1$

នាំអោយ $r = \pm 1$

ចំនួនទាំងបួននោះគឺ 1 , 3 , 5 , 7 រឺ 7 , 5 , 3 , 1

ដូចនេះ ចំនួនទាំងបួននោះ គឺ ($4 \mp \sqrt{151}$, $4 \mp \dfrac{\sqrt{151}}{3}$, $4 \pm \dfrac{\sqrt{151}}{3}$, $4 \pm \sqrt{151}$), (1 , 3 , 5 , 7) , (7 , 5 , 3 , 1)

ខ. គណនា m ដើម្បីអោយរឹសទាំងបួនរបស់សមីការរៀបបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

តាង $x - 3r$, $x - r$, $x + r$ និង $x + 3r$ ជារឹសរបស់សមីការ

សមីការ $x^4 - (3m+4)x^2 + (m+1)^2 = 0$ មាន:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 & (1) \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1+x_1x_3+x_2x_4=-(3m+4) & (2) \\ x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_1+x_4x_2x_1=0 & (3) \\ x_1x_2x_3x_4=(m+1)^2 & (4) \end{cases}$$

ពី (1)៖ $x_1+x_2+x_3+x_4=0$

នាំអោយ $x-3r+x-r+x+r+x+3r=0$

នាំអោយ $x=0$

រឹសទាំងបួនរបស់សមីការទៅជា $-3r$, $-r$, r , $3r$

ពី (2)៖ $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1+x_1x_3+x_2x_4=-(3m+4)$

ដោយ $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1+x_1x_3+x_2x_4$

$=(-3r)(-r)+(-r)(r)+(r)(3r)+(3r)(-3r)+(-3r)(r)+(-r)(3r)$

$=-10r^2$

នាំអោយ $-10r^2=-(3m+4)$

នាំអោយ $r^2=\dfrac{3m+4}{10}$ (5)

ពី (3)៖ $x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_1+x_4x_2x_1=0$

នាំអោយ

$(-3r)(-r)(r)+(-r)(r)(3r)+(r)(3r)(-3r)+(3r)(-3r)(-r)=0$

នាំអោយ $3r^3-3r^3-9r^3+9r^3=0$ ពិត $\forall r\in IR$

ពី (4)៖ $x_1x_2x_3x_4=(m+1)^2$ នាំអោយ $(-3r)(-r)(r)(3r)=(m+1)^2$

នាំអោយ $9r^4=(m+1)^2$

នាំអោយ $r^2=\dfrac{|m+1|}{3}$ (6)

តាម (5) និង (6)៖ $\frac{|m+1|}{3}=\frac{3m+4}{10}$

យើងបាន៖ $\frac{m+1}{3}=\frac{3m+4}{10}$ ឬ $\frac{m+1}{3}=-\left(\frac{3m+4}{10}\right)$

បើ $\frac{m+1}{3}=\frac{3m+4}{10}$ នាំអោយ $10m+10=9m+12$

នាំអោយ $m=2$

ឫសរបស់សមីការគឺ $(-3, -1, 1, 3)$ ឬ $(3, 1, -1, -3)$

បើ $\frac{m+1}{3}=-\left(\frac{3m+4}{10}\right)$ នាំអោយ $10m+10=-9m-12$

នាំអោយ $19m=-22$

នាំអោយ $m=-\frac{22}{19}$

ឫសរបស់សមីការគឺ $\left(-\frac{3\sqrt{19}}{19}, -\frac{\sqrt{19}}{19}, \frac{\sqrt{19}}{19}, \frac{3\sqrt{19}}{19}\right)$ ឬ

$\left(\frac{3\sqrt{19}}{19}, \frac{\sqrt{19}}{19}, -\frac{\sqrt{19}}{19}, -\frac{3\sqrt{19}}{19}\right)$

ដូចនេះ $m=2$, $m=-\frac{22}{19}$

11. គេអោយ a , b ជាចំនួនថេរ និង ស្វ៊ីត (u_n) មួយដែលកំណត់ដោយ៖

$u_{n+1}=au_n+b$ ។

ក. យកស្វ៊ីត (v_n) ដែល $v_n=u_{n+1}-u_n$ ។ ស្រាយថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n បើគេដឹងថា $u_1=1$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក. ស្រាយថា (v_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រ

យើងមាន: $u_{n+1}=au_n+b$ នាំអោយ $u_{n+2}=au_{n+1}+b$

នាំអោយ $u_{n+2}-u_{n+1}=a(u_{n+1}-u_n)$ ដោយ $v_n=u_{n+1}-u_n$

នាំអោយ $v_{n+1}=av_n$ ជាស្វីតធរណីមាត្រ ព្រោះ a ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ (v_n) *ជាស្វីតធរណីមាត្រ ដែលមាន* $q=a$

ខ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន: (v_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រ ដែលមាន $q=a$ ហើយ

$v_1=u_2-u_1=au_1+b-u_1=a+b-1$

នាំអោយ $v_n=v_1q^{n-1}=(a+b-1)a^{n-1}$

នាំអោយ $u_{n+1}-u_n=(a+b-1)a^{n-1}$

យើងបាន: $u_2-u_1=(a+b-1)a^0$

$u_3-u_2=(a+b-1)a^1$

$u_4-u_3=(a+b-1)a^2$

....

$u_n-u_{n-1}=(a+b-1)a^{n-2}$

បូកអង្គ និង អង្គ: $u_n-u_1=(a+b-1)(1+a^1+a^2+\ldots+a^{n-2})$

នាំអោយ $u_n=\dfrac{(a+b-1)(a^{n-1}-1)}{a-1}+1$ ព្រោះ $u_1=1$

ដូចនេះ $u_n=\dfrac{(a+b-1)(a^{n-1}-1)}{a-1}+1$

12.សមីការដឺក្រេទី 2 $ax^2+bx+c=0$ មានរឹស x_1 , x_2 ដែល $|x_1|>|x_2|$ ។

គណនាផលបូក $\mathrm{E}=1+\frac{x_2}{x_1}+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^4+\ldots$ ។

ចម្លើយ

គណនា $\mathrm{E}=1+\frac{x_2}{x_1}+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^4+\ldots$

យើងមាន: $\mathrm{E}=1+\frac{x_2}{x_1}+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^4+\ldots$

ជាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួមាន: $u_1=1,\ q=\frac{x_2}{x_1}<1$ ព្រោះ $|x_2|<|x_1|$

នាំអោយ $\mathrm{E}=\frac{1}{1-\frac{x_2}{x_1}}=\frac{x_1}{x_1-x_2}>0$ យក $\mathrm{E}'=-\frac{x_2}{x_1-x_2},\ E'<0$

នាំអោយ $\mathrm{E}+\mathrm{E}'=\frac{x_1}{x_1-x_2}-\frac{x_2}{x_1-x_2}=1$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត:

$$\mathrm{EE}'=\left(\frac{x_1}{x_1-x_2}\right)\left(-\frac{x_2}{x_1-x_2}\right)=-\frac{x_1x_2}{(x_1-x_2)^2}=-\frac{x_1x_2}{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\ (2)$$

សមីការ $ax^2+bx+c=0$ មាន $x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a}$

ពី (2) យើងបាន:

$$\mathrm{EE}'=-\frac{x_1x_2}{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\frac{c}{a}}{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{4c}{a}}=\frac{\frac{c}{a}}{\frac{b^2-4ac}{a^2}}$$

នាំអោយ $EE' = \dfrac{ac}{b^2 - 4ac}$ (3)

តាម (2) និង (3): E, E' ជាឫសរបស់សមីការ $X^2 - X + \dfrac{ac}{b^2-4ac} = 0$

មាន $\Delta = 1 + \dfrac{4ac}{b^2-4ac} = \dfrac{b^2}{b^2-4ac}$ សមីការមានឫស

$$X_1 = \frac{1+\sqrt{\dfrac{b^2}{b^2-4ac}}}{2} = \frac{1+\dfrac{|b|}{\sqrt{b^2-4ac}}}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{|b|}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$$

$$X_2 = \frac{1-\sqrt{\dfrac{b^2}{b^2-4ac}}}{2} = \frac{1-\dfrac{|b|}{\sqrt{b^2-4ac}}}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{|b|}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) < X_1$$

នាំអោយ $E = X_1$, $E' = X_2$

នាំអោយ $E = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{|b|}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$

ដូចនេះ $E = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{|b|}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$

13. គណនាផលបូកខាងក្រោម:

ក. $A = 0.\overline{1} + 0.\overline{2} + 0.\overline{3} + 0.\overline{4} + \ldots + 0.\overline{99}$

ខ. $B = \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots\right) + \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5^2} + \ldots\right) + \left(\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9^2} + \ldots\right) + \ldots$

$$+\left[\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{(2^n+1)^2} + \ldots\right] + \ldots$$

ចម្លើយ

ក. គណនា $A = 0.\overline{1} + 0.\overline{2} + 0.\overline{3} + 0.\overline{4} + \ldots + 0.\overline{99}$

តាមរូបមន្ត: $S_\infty = \dfrac{u_1}{1-q}$ យើងបាន:

$$0.\overline{1} = 0.1+0.01+0.001+\ldots = \frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$$

ស្រាយដូចគ្នា: $0.\overline{2} = \dfrac{2}{9}$, . . . , $0.\overline{9} = \dfrac{9}{9}$, $0.\overline{10} = \dfrac{10}{99}$, . . ., $0.\overline{99} = \dfrac{99}{99}$

$$A = \left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\ldots+\frac{9}{9}\right)+\left(\frac{10}{99}+\frac{11}{99}+\ldots+\frac{99}{99}\right)$$

$$= \frac{9(9+1)}{2\times 9}+\frac{90(99+10)}{2\times 99}$$

$$= 5+\frac{5\times 109}{11} = \frac{55+545}{11} = \frac{600}{11}$$

ដូចនេះ $A = \dfrac{600}{11}$

ខ. $B = \left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots\right)+\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+\ldots\right)+\left(\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9^2}+\ldots\right)+\ldots$

$$+\left[\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{\left(2^n+1\right)^2}+\ldots\right]+\ldots$$

ប្រើរូបមន្ត ផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ $S_\infty = \dfrac{u_1}{1-q}$

យើងបាន: $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}\ldots = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}\ldots = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$$

....

$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{(2^n+1)^2}+\frac{1}{(2^n+1)^3}+....=\frac{\frac{1}{2^n+1}}{1-\frac{1}{2^n+1}}$$

$$=\frac{1}{2^n+1}\cdot\frac{2^n+1}{2^n}=\frac{1}{2^n}$$

នាំអោយ $B=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}+...$ ជាផលបូកស៊ីតធរណីមាត្រ

អនន្តតួមាន: $u_1=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$

នាំអោយ $B=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}=1$

ដូចនេះ $B=1$

14. គេអោយបីចំនួន A , B , C កំណត់ដោយ:

$A=888...888$ មានលេខ 8 ចំនួន n ដង

$B=222...222$ មានលេខ 2 ចំនួន $n+1$ ដង

$C=444...444$ មានលេខ 4 ចំនួន $2n$ ដង ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A+B+C+7$ ជាការេប្រាកដ ។

<u>ចម្លើយ</u>

- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A+B+C+7$ ជាការេប្រាកដ

យើងមាន: $A=888...888$ លេខ 8 ចំនួន n ដង

$=8(111...111)$ លេខ 1 ចំនួន n ដង

$$=8\left(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+1\right)$$

$$=8\left(1+10+\ldots+10^{n-2}+10^{n-1}\right)$$

ដោយ $1+10+\ldots+10^{n-2}+10^{n-1}$ ជាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល $u_1=1$, $q=10$ មាន n តួ

នាំអោយ $A=\dfrac{8\left(10^{n}-1\right)}{9}=\dfrac{8\cdot 10^{n}-8}{9}$ （1）

ស្រាយដូចគ្នាដែរ

នាំអោយ $B=\dfrac{2\left(10^{n+1}-1\right)}{9}=\dfrac{20\cdot 10^{n}-2}{9}$ （2）

$C=\dfrac{4\left(10^{2n}-1\right)}{9}=\dfrac{4\cdot 10^{2n}-4}{9}$ （3）

យើងបាន:

$$A+B+C+7=\frac{8\cdot 10^{n}-8+20\cdot 10^{n}-2+4\cdot 10^{2n}-4}{9}+7$$

$$=\frac{4\cdot 10^{2n}+28\cdot 10^{n}+49}{9}=\left(\frac{2\cdot 10^{n}+7}{3}\right)^{2}$$

ដោយ $2\cdot 10^{n}+7$ ជាចំនួនមានផលបូកលេខខ្ទង់ទាំងអស់ស្មើនឹង 9

នាំអោយ $2\cdot 10^{n}+7$ ចែកដាច់នឹង 3

ដូចនេះ $A+B+C+7=\left(\dfrac{2\cdot 10^{n}+7}{3}\right)^{2}$ *ជាការប្រាកដ*

15. រឹស x_1, x_2, x_3 របស់សមីការ $x^3+ax^2+bx+c=0$ ជាបីតួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $b=a\sqrt[3]{c}$ ។

ចម្លើយ

- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $b=a\sqrt[3]{c}$

សមីការ $x^3+ax^2+bx+c=0$ មានៈ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-a & (1)\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b & (2)\\ x_1x_2x_3=-c & (3)\end{cases}$

ដោយ x_1 , x_2 , x_3 ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នាំអោយ $x_2^2=x_1x_3$

ពី (3)ៈ $x_1x_2x_3=-c$ នាំអោយ $x_2^3=-c$

នាំអោយ $x_2=-\sqrt[3]{c}$ (4)

នាំអោយ $x_1x_3=\sqrt[3]{c^2}$ (5)

ពី (1)ៈ $x_1+x_2+x_3=-a$ នាំអោយ $x_1+x_3=-a+\sqrt[3]{c}$ (6)

ពី (2)ៈ $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b$ រឺ $(x_1+x_3)x_2+x_3x_1=b$ (7)

យក (4) , (5), (6) ជំនួសក្នុង (7) យើងបានៈ

$$-\sqrt[3]{c}\left(-a+\sqrt[3]{c}\right)+\sqrt[3]{c^2}=b$$

នាំអោយ $a\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{c^2}+\sqrt[3]{c^2}=b$

នាំអោយ $a\sqrt[3]{c}=b$

ដូចនេះ $b=a\sqrt[3]{c}$

16. សិក្សាអថេរភាពនៃស្វ៊ីត (u_n) បើ $u_n=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2...\sqrt{2}}}}$ មានរ៉ាឌីកាល់ ចំនួន n ដង ។

ចម្លើយ

- សិក្សាអថេរភាពនៃស្វ៊ីត (u_n)

យើងមានៈ $u_n=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2...\sqrt{2}}}}$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}\dots\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{2}}}}}_{n\text{ រ៉ាឌីកាល់}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2^2}}\cdot 2^{\frac{1}{2^3}}\cdot 2^{\frac{1}{2^4}}\dots 2^{\frac{1}{2^n}}$$

នាំអោយ $u_n=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots+\frac{1}{2^n}}$ ដោយ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots+\frac{1}{2^n}$

ជាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន: $a_1=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$ ចំនួន n តួដំបូង

តាមរូបមន្ត: $S_n=\frac{u_1(q^n-1)}{q-1}$ រឺ $S_n=\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$

នាំអោយ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}$

$$=1-\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$$

នាំអោយ $u_n=2^{\frac{2^n-1}{2^n}}$ យើងបាន: $u_{n+1}=2^{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}}$

នាំអោយ $\frac{u_{n+1}}{u_n}=2^{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}-\frac{2^n-1}{2^n}}=2^{\frac{2^{n+1}-1-2^{n+1}+2}{2^{n+1}}}=2^{\frac{1}{2^{n+1}}}>1$ ព្រោះ $\frac{1}{2^{n+1}}>0$

នាំអោយ $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$

ដូចនេះ *ស្វ៊ីត* (u_n) *ជាស្វ៊ីតកើន*

17. គេអោយ S_n ជាផលបូកនៃចំនួនតួសេសនៃស្ទីតធរណីមាត្រមួយ S'_n ជាផលបូកបានដោយប្តូរសញ្ញានៃចំនួនតួគូ ហើយ $\sum$ ជាផលបូកការេនៃតម្លៃតួទាំងអស់។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $S_n \times S'_n = \sum$ ។

អនុវត្តន៍: សំរួលកន្សោម $A = \dfrac{1+x^2+x^4}{1+x+x^2}$, $B = \dfrac{1+x^2+x^4+x^6+x^8}{1+x+x^2+x^3+x^4}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់

- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $S_n \times S'_n = \sum$

យក u_1 ជាតួទី1 ហើយ q ជារេសុងនៃស្ទីតនោះ

ដោយ S_n ជាផលបូកនៃចំនួនតួសេស

នាំអោយ $S_n = \dfrac{u_1(q^n - 1)}{q-1} = \dfrac{u_1(q^{2k+1} - 1)}{q-1} \qquad (k \in IN)$

S'_n ជាផលបូកបានដោយប្តូរសញ្ញានៃចំនួនតួគូ

នាំអោយ S'_n ជាផលបូកស្ទីតធរណីមាត្រមានៈ u_1 ជាតួទី1 , $-q$ ជារេសុងនៃស្ទីត

នាំអោយ $S'_n = \dfrac{u_1\left[(-q)^{2k+1} - 1\right]}{-q-1} = \dfrac{u_1\left[q^{2k+1} + 1\right]}{q+1}$

នាំអោយ $S_n \times S'_n = \left[\dfrac{u_1(q^{2k+1}+1)}{q-1}\right]\left[\dfrac{u_1(q^{2k+1}-1)}{q+1}\right]$

នាំអោយ $S_n \times S'_n = \dfrac{{u_1}^2\left[(q^{2k+1})^2 - 1\right]}{q^2 - 1} \qquad (1)$

$\sum$ ជាផលបូកការេនៃតម្លៃតួទាំងអស់

នាំអោយ $\sum$ ជាផលបូក n តួនៃស្ទីតធរណីមាត្រមាន ${u_1}^2$ ជាតួទី1 និង q^2 ជារេសុង

នាំអោយ $\sum=\dfrac{u_1{}^2\left[(q^2)^n-1\right]}{q^2-1}=\dfrac{u_1{}^2\left[(q^2)^{2k+1}-1\right]}{q^2-1}$

នាំអោយ $\sum=\dfrac{u_1{}^2\left[(q^{2k+1})^2-1\right]}{q^2-1}$ (2)

តាម $(1),(2)$ យើងបាន $S_n\times S'_n=\sum$

ដូចនេះ $S_n\times S'_n=\sum$

អនុវត្តន៍: សំរួលកន្សោម: $A=\dfrac{1+x^2+x^4}{1+x+x^2}$

យើងមាន: $A=\dfrac{1+x^2+x^4}{1+x+x^2}$

នាំអោយ $A=\dfrac{1^2+(x)^2+(x^2)^2}{1+x+x^2}=\dfrac{\sum}{S_n}=\dfrac{S_n\times S'_n}{S_n}$

នាំអោយ $A=\dfrac{(1+x+x^2)(1-x+x^2)}{1+x+x^2}$

ដូចនេះ $A=1-x+x^2$

សំរួលកន្សោម $B=\dfrac{1+x^2+x^4+x^6+x^8}{1+x+x^2+x^3+x^4}$

យើងមាន: $B=\dfrac{1+x^2+x^4+x^6+x^8}{1+x+x^2+x^3+x^4}=\dfrac{1^2+x^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2}{1+x+x^2+x^3+x^4}$

នាំអោយ $B=\dfrac{\sum}{S_n}=\dfrac{S_n\times S'_n}{S_n}$

នាំអោយ $B=\dfrac{(1+x+x^2+x^3+x^4)(1-x+x^2-x^3+x^4)}{1+x+x^2+x^3+x^4}$

ដូចនេះ $B=1-x+x^2-x^3+x^4$

18. គណនាផលបូកខាងក្រោម៖

ក. $\sum_{k=1}^{n} 2k+\sum_{k=1}^{n}(2k+2)-\sum_{k=1}^{n}(4k+1)$

ខ. $\sum_{k=1}^{n}\left(k^{2}+k+1\right)$

គ. $\sum_{k=7}^{15} k^{3}+\sum_{k=7}^{15} k^{2}+\sum_{k=7}^{15} k$

ចម្លើយ

- គណនាផលបូក

ក. $\sum_{k=1}^{n} 2k+\sum_{k=1}^{n}(2k+2)-\sum_{k=1}^{n}(4k+1)$

យើងមាន៖ $\sum_{k=1}^{n} 2k+\sum_{k=1}^{n}(2k+2)-\sum_{k=1}^{n}(4k+1)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k+2k+2-4k-1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} 1=n$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n} 2k+\sum_{k=1}^{n}(2k+2)-\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=n$

ខ. $\sum_{k=1}^{n}\left(k^{2}+k+1\right)$

យើងមាន៖ $\sum_{k=1}^{n}\left(k^{2}+k+1\right)=\sum_{k=1}^{n} k^{2}+\sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n} 1$

ដោយ $\sum_{k=1}^{n} k^{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} 1=n$

នាំអោយ $\sum_{k=1}^{n}\left(k^{2}+k+1\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}+n$

$$= \frac{n}{6}\left[(n+1)(2n+1)+3(n+1)+6\right]$$
$$= \frac{n}{6}\left(2n^2+3n+1+3n+9\right)$$
$$= \frac{n}{6}\left(2n^2+6n+10\right)$$
$$= \frac{n\left(n^2+3n+5\right)}{3}$$

ដូចនេះ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k+1\right)=\frac{n\left(n^2+3n+5\right)}{3}$

គ. $\displaystyle\sum_{k=7}^{15}k^3+\sum_{k=7}^{15}k^2+\sum_{k=7}^{15}k$

យើងមាន៖

$$\sum_{k=7}^{15}k^3+\sum_{k=7}^{15}k^2+\sum_{k=7}^{15}k=\sum_{k=1}^{15}k^3-\sum_{k=1}^{6}k^3+\sum_{k=1}^{15}k^2-\sum_{k=1}^{6}k^2+\sum_{k=1}^{15}k-\sum_{k=1}^{6}k$$

ដោយ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

នាំអោយ

$$\sum_{k=7}^{15}k^3+\sum_{k=7}^{15}k^2+\sum_{k=7}^{15}k=\left[\frac{15(15+1)}{2}\right]^2+\frac{15(15+1)(30+1)}{6}+\frac{15(15+1)}{2}$$
$$-\left[\frac{6(6+1)}{2}\right]^2-\frac{6(6+1)(12+1)}{6}-\frac{6(6+1)}{2}$$

$$=14400+1240+120-441-91-21$$

ដូចនេះ $\displaystyle\sum_{k=7}^{15}k^3+\sum_{k=7}^{15}k^2+\sum_{k=7}^{15}k=15207$

19. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលកំណត់ដោយៈ

ក. $1\,,\ \dfrac{1}{1+2}\,,\ \dfrac{1}{1+2+3}\,,\ \ldots\,,\ \dfrac{1}{1+2+\ldots+n}$

ខ. $\dfrac{1}{(1\cdot 3)^2}\,,\ \dfrac{2}{(3\cdot 5)^2}\,,\dfrac{3}{(5\cdot 7)^2}\,,\ \ldots\,,\ \dfrac{n}{[(2n-1)(2n+1)]^2}$

គ. $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}\,,\ \dfrac{2^2}{3\cdot 5}\,,\dfrac{3^2}{5\cdot 7}\,,\ \ldots\,,\ \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$

<u>ចម្លើយ</u>

- គណនាផលបូក

ក. $1\,,\ \dfrac{1}{1+2}\,,\ \dfrac{1}{1+2+3}\,,\ \ldots\,,\ \dfrac{1}{1+2+\ldots+n}$

នាំអោយ $$S_n = 1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+n}$$
$$= 1+\frac{2}{2(2+1)}+\frac{2}{3(3+1)}+\frac{2}{4(4+1)}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)}$$
$$= 1+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)}$$
$$= 2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

ដោយ $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ យក $k=1\,,\ 2\,,\ \ldots\,,\ n$

នាំអោយ $$S_n = 2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

នាំអោយ $$S_n = 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

នាំអោយ $$S_n = \frac{2n}{n+1}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{2n}{n+1}$

ខ. $\dfrac{1}{(1\cdot 3)^2}$, $\dfrac{2}{(3\cdot 5)^2}$, $\dfrac{3}{(5\cdot 7)^2}$, ... , $\dfrac{n}{[(2n-1)(2n+1)]^2}$

នាំអោយ $S_n = \dfrac{1}{(1\cdot 3)^2} + \dfrac{2}{(3\cdot 5)^2} + \dfrac{3}{(5\cdot 7)^2} + \dots + \dfrac{n}{[(2n-1)(2n+1)]^2}$

យើងមាន: $\dfrac{k}{[(2k-1)(2k+1)]^2} = \dfrac{1}{8}\left[\dfrac{1}{(2k-1)^2} - \dfrac{1}{(2k+1)^2}\right]$

យក $k = 1\,,\ 2\,,\ \dots,\ n$

យើងបាន: $\dfrac{1}{(1\cdot 3)^2} = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{1^2} - \dfrac{1}{3^2}\right)$

$\dfrac{1}{(3\cdot 5)^2} = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{5^2}\right)$

$\dfrac{1}{(5\cdot 7)^2} = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{5^2} - \dfrac{1}{7^2}\right)$

....

$\dfrac{n}{[(2n-1)(2n+1)]^2} = \dfrac{1}{8}\left[\dfrac{1}{(2n-1)^2} - \dfrac{1}{(2n+1)^2}\right]$

នាំអោយ $S_n = \dfrac{1}{8}\left[\dfrac{1}{1^2} - \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{5^2} + \dots + \dfrac{1}{(2n-1)^2} - \dfrac{1}{(2n+1)^2}\right]$

$$= \frac{1}{8}\left[1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{(2n+1)^2 - 1}{(2n+1)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{4n(n+1)}{(2n+1)^2}$$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)^2}$

គ. $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}$, $\dfrac{2^2}{3\cdot 5}$, $\dfrac{3^2}{5\cdot 7}$, ... , $\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$

នាំអោយ $S_n=\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\dfrac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$

យើងមាន: $\dfrac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{k}{2k-1}+\dfrac{k}{2k+1}\right)$

យក $k=1$, 2 , ... , n យើងបាន:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{2^2}{3\cdot 5}=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)$$

$$\frac{3^2}{5\cdot 7}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{7}\right)$$

....

$$\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{n}{2n-1}+\frac{n}{2n+1}\right)$$

នាំអោយ

$$S_n=\frac{1}{4}\left[1+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{n-1}{2n-1}+\frac{n}{2n-1}\right)+\frac{n}{2n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(\underbrace{1+1+....+1+1}_{n}+\frac{n}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(n+\frac{n}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{2n^2+2n}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

20. ក. សម្រួលកន្សោម $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ ។

ខ. ដោយប្រើចម្លើយ ក គណនាផលបូក

$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+...+20\cdot 21\cdot 22$ ។

ចម្លើយ

ក. សម្រួលកន្សោម $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$

យើងមាន: $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n}\left(k^3+3k^2+2k\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k$$

ដោយ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

$\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

នាំអោយ

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}\left[n(n+1)+2(2n+1)+4\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}\left(n^2+5n+6\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

ដូចនេះ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

ខ. គណនា $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \ldots + 20\cdot 21\cdot 22$

យើងមាន: $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \ldots + 20\cdot 21\cdot 22$

$$= \sum_{k=1}^{20} k(k+1)(k+2)$$

ដោយ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

នាំអោយ

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \ldots + 20\cdot 21\cdot 22 = \frac{20\cdot 21\cdot 22\cdot 23}{4}$$

$$= 53130$$

ដូចនេះ $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \ldots + 20\cdot 21\cdot 22 = 53130$

21.កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n)ដែលមានលំដាប់តួ: p , q , p , q , p , q , ... ។

ចម្លើយ

- កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n)

យក (b_n) ជាស្វ៊ីតផលសងតួលំដាប់ទី១នៃស្វ៊ីត (u_n) ដែល $b_n = u_{n+1} - u_n$

នាំអោយ (b_n): $q-p$, $p-q$, $q-p$, ...

នាំអោយ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន $b_1 = q-p$, $q' = -1$

នាំអោយ $b_n = (-1)^{n-1}(q-p)$

នាំអោយ $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1}(q-p)$ ដោយ $u_1 = p$

នាំអោយ $u_n = p + \frac{(q-p)\left[(-1)^{n-1} - 1\right]}{-1-1} = p + \frac{(p-q)\left[(-1)^{n-1} - 1\right]}{2}$

$$= p + \frac{(p-q)(-1)^{n-1} + q - p}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(p+q) + (p-q)(-1)^{n-1}\right]$$

ដូចនេះ $u_n = \frac{1}{2}\left[(p+q) + (p-q)(-1)^{n-1}\right]$

22. ក. តើ 10003 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត (a_n): 4 , 7 , 12 , 19 , 28 , . . . ?   ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

ចម្លើយ

ក. តើ 10003 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត (a_n)

យក (b_n) ជាស្វ៊ីតផលសងតួលំដាប់ទី 1 នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល $b_n = a_{n+1} - a_n$

នាំអោយ (b_n): 3 , 5 , 7 , 9 ,. . . ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមាន: $b_1 = 3$, $d = 2$

នាំអោយ $b_n = b_1 + (n-1)d = 3 + 2(n-1) = 2n+1$

ដោយ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 4 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1) = 4 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1$

$$= 4 + \frac{2n(n-1)}{2} + n - 1 = n^2 + 3$$

នាំអោយ $a_n = n^2 + 3$

បើ $a_n = 10003$ នាំអោយ $n^2 + 3 = 10003$

នាំអោយ $n = \pm 100$ ដោយ $n \in IN$

នាំអោយ $n = 100$

ដូចនេះ 10003 *ជាតួទី 100 នៃស៊ីត* (a_n)

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត (a_n)

យើងមាន: $a_n = n^2 + 3$

នាំអោយ $S_n = \sum_{k=1}^{n}(k^2+3) = \sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}3$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4n$$

$$= \frac{n}{6}[(n+1)(2n+1)+24]$$

$$= \frac{n(2n^2+3n+25)}{6}$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{n(2n^2+3n+25)}{6}$

23. គេអោយស៊ីត (a_n) មួយកំណត់ដោយទំនាក់ទំនង: $a_1 = 1$,

$a_{n+1}^3 = a_n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ ។

ក. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (a_n) ។

ខ. គណនា $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k(a_k+1)(a_k+2)}$ ។

ចម្លើយ

ក. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (a_n)

យើងមាន: $a_{n+1}^3 = a_n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

នាំអោយ $a_{n+1}^3 - a_n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

យើងបាន: $a_2^3 - a_1^3 = 3(1)^2 + 3(1) + 1$

$a_3^3 - a_2^3 = 3(2)^2 + 3(2) + 1$

$$a_4^3 - a_3^3 = 3(3)^2 + 3(3) + 1$$

....

$$a_{n-1}^3 - a_{n-2}^3 = 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1$$

$$a_n^3 - a_{n-1}^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$$

បូកអង្គ និង អង្គ: $a_n^3 - a_1^3 = 3\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1$

$$= \frac{3n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{3n(n-1)}{2} + (n-1)$$

$$= \frac{(n-1)[n(2n-1) + 3n + 2]}{2}$$

$$= \frac{(n-1)(2n^2 + 2n + 2)}{2}$$

$$= (n-1)(n^2 + n + 1)$$

$$= n^3 - 1$$

នាំអោយ $a_n^3 = n^3 + a_1 - 1$ ដោយ $a_1 = 1$

នាំអោយ $a_n^3 = n^3$ នាំអោយ $a_n = n$

ដូចនេះ *តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ $a_n = n$*

ខ. គណនា $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k(a_k+1)(a_k+2)}$

យើងមាន: $a_n = n$

នាំអោយ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k(a_k+1)(a_k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

យក $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{x}{k(k+1)} - \frac{y}{(k+1)(k+2)}$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{(k+2)x-ky}{k(k+1)(k+2)}$$

យើងបាន: $(k+2)x-ky=1$

$$kx-ky+2x-1=0$$

$k(x-y)+2x-1=0$ ពិត គ្រប់ $k\in IN$

កាលណា $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-1=0 \end{cases}$ នាំអោយ $x=y=\frac{1}{2}$

នាំអោយ $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2k(k+1)}-\frac{1}{2(k+1)(k+2)}$

នាំអោយ $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$

យក $k=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ ....,\ n$ យើងបាន:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)$$

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)$$

....

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

នាំអោយ $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)-2}{4(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

នាំអោយ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

ដូចនេះ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k(a_k+1)(a_k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

24. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើនៈ

ក. $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+2n$

ខ. $a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n+n^2+n+1$

គ. $a_1=3,\ a_{n+1}=4a_n+2^n$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

- កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

ក. $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+2n$

យក (r_n) ជាស្វ៊ីតជំនួយនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល $r_n=an+b$

ដោយ $a_{n+1}=2a_n+2n$ (1)

យើងបានៈ $r_{n+1}=2r_n+2n$

ឬ $a(n+1)+b=2(an+b)+2n$

ឬ $an+a+b=2an+2b+2n$

ឬ $an+2n+b-a=0$

ឬ $(a+2)n+(b-a)=0$

កាលណាៈ $\begin{cases}a+2=0\\ b-a=0\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}a=-2\\ b=-2\end{cases}$

នាំអោយ $r_n = -2n-2$

ពី $r_{n+1} = 2r_n + 2n$

នាំអោយ $-2(n+1)-2 = 2(-2n-2)+2n$ （2）

ដក（1）និង（2）យើងបាន: $a_{n+1} + 2(n+1) + 2 = 2(a_n + 2n + 2)$

យក $b_n = a_n + 2n + 2$

នាំអោយ $b_{n+1} = 2b_n$

នាំអោយ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន: $b_1 = a_1 + 2 + 2 = 5, q = 2$

នាំអោយ $b_n = b_1 q^{n-1} = 5\cdot 2^{n-1}$

នាំអោយ $a_n + 2n + 2 = 5\cdot 2^{n-1}$

នាំអោយ $a_n = 5\cdot 2^{n-1} - 2n - 2$

ដូចនេះ *តួទី n នៃស៊្វីត* (a_n) *គឺ* $a_n = 5\cdot 2^{n-1} - 2n - 2$

ខ. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + n^2 + n + 1$

យក (r_n) ជាស្វ៊ីតជំនួយនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល $r_n = an^2 + bn + c$

ដោយ $a_{n+1} = 3a_n + n^2 + n + 1$ （1）

នាំអោយ $r_{n+1} = 3r_n + n^2 + n + 1$

នាំអោយ $a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 3(an^2 + bn + c) + n^2 + n + 1$

នាំអោយ $an^2 + 2an + a + bn + b + c = 3an^2 + 3bn + 3c + n^2 + n + 1$

នាំអោយ $2an^2 + n^2 + 2bn - 2an + n - a - b + 2c + 1 = 0$

នាំអោយ $n^2(2a+1) + n(2b-2a+1) - (a+b-2c-1) = 0$

កាលណា $\begin{cases}2a+1=0\\2b-2a+1=0\\a+b+2c-1=0\end{cases}$ រឺ $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\b=-1\\c=\dfrac{5}{4}\end{cases}$

នាំអោយ $r_n=-\frac{1}{2}n^2-n+\frac{5}{4}$

នាំអោយ $r_{n+1}=3r_n+n^2+n+1$ ទៅជា:

$$-\frac{1}{2}(n+1)^2-(n+1)+\frac{5}{4}=3\left[-\frac{1}{2}n^2-n+\frac{5}{4}\right] \quad (2)$$

ធ្វើផលសងរវាង (1) និង (2) យើងបាន:

$$a_{n+1}+\frac{1}{2}(n+1)^2+(n+1)-\frac{5}{4}=3\left(a_n+\frac{1}{2}n^2+n-\frac{5}{4}\right)$$

យក $b_n=a_n+\frac{1}{2}n^2+n-\frac{5}{4} \Rightarrow b_{n+1}=3b_n$

នាំអោយ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានៈ

$q=3$, $b_1=a_1+\frac{1}{2}+1-\frac{5}{4}=2+\frac{1}{2}+1-\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$

នាំអោយ $b_n=b_1q^{n-1}=\frac{9}{4}\times 3^{n-1}=\frac{3^{n+1}}{4}$

យើងបាន: $a_n+\frac{1}{2}n^2+n-\frac{5}{4}=\frac{3^{n+1}}{4}$

នាំអោយ $a_n=\frac{3^{n+1}}{4}-\frac{1}{2}n^2-n+\frac{5}{4}$

ដូចនេះ *តួទី n នៃស្វ៊ីត* (a_n) *គឺ* $a_n=\frac{3^{n+1}}{4}-\frac{1}{2}n^2-n+\frac{5}{4}$

គ. $a_1=3$, $a_{n+1}=4a_n+2^n$

យក (r_n) ជាស៊ីតជំនួយនៃស៊ីត (a_n) ដែល $r_n = a\cdot 2^n$

ដោយ $a_{n+1} = 4a_n + 2^n$ （1）

នាំអោយ $a\cdot 2^{n+1} = 4a\cdot 2^n + 2^n$

នាំអោយ $2a\cdot 2^n - 4a2^n - 2^n = 0$

នាំអោយ $(2a+1)2^n = 0$

កាលណា $2a+1=0$ រឺ $a = -\frac{1}{2}$

នាំអោយ $r_n = -\frac{1}{2}\cdot 2^n = -2^{n-1}$

ពី $r_{n+1} = 4r_n + 2^n$ នាំអោយ $-2^{n-1+1} = -4\cdot 2^{n-1} + 2^n$

នាំអោយ $-2^n = -4\cdot 2^{n-1} + 2^n$ （2）

ធ្វើផលសងរវាង（1） និង（2）យើងបាន៖

$$a_{n+1} + 2^n = 4a_n + 4\cdot 2^{n-1}$$

រឺ $a_{n+1} + 2^n = 4\left(a_n + 2^{n-1}\right)$

យក $b_n = a_n + 2^{n-1}$ នាំអោយ $b_{n+1} = 4b_n$

នាំអោយ (b_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមាន៖ $q = 4$, $b_1 = a_1 + 2^{1-1} = 3+1 = 4$

នាំអោយ $b_n = 4\cdot 4^{n-1} = 4^n$

នាំអោយ $b_n = a_n + 2^{n-1}$ សមមូល $a_n + 2^{n-1} = 4^n$

រឺ $a_n = 4^n - 2^{n-1}$

ដូចនេះ *តួទី n ជានៃស៊ីត (a_n) គឺ* $a_n = 4^n - 2^{n-1}$

25. គេអោយស៊ីត (a_n) មួយកំណត់ ដោយទំនាក់ទំនង៖ $a_7 = 7$,
$a_{n+1} = 2a_n + 1$ ។ កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (a_n) ។

<u>ចម្លើយ</u>

- កំណត់តួទី n ជានៃស្វ៊ីត (a_n) បើ $a_7=7, a_{n+1}=2a_n+1$

យក (r_n) ជាស្វ៊ីតជំនួយនៃស្វ៊ីត (a_n) នាំអោយ $r_n=a$

ដោយ $a_{n+1}=2a_n+1$ （1）

យើងបាន: $r_{n+1}=2r_n+1$ រឺ $a=2a+1$

រឺ $a=-1$

នាំអោយ $r_n=-1$

នាំអោយ $r_{n+1}=2r_n+1$ សមមូល

$-1=-2+1$ （2）

ដក（1）និង（2）យើងបាន: $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$ យក $b_n=a_n+1$

នាំអោយ $b_{n+1}=2b_n$

នាំអោយ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន: $b_7=a_7+1=8$, $q=2$

នាំអោយ $b_n=b_7q^{n-7}=8\cdot 2^{n-7}$

នាំអោយ $a_n+1=8\cdot 2^{n-1}$

នាំអោយ $a_n=8\cdot 2^{n-1}-1$

នាំអោយ $a_n=2^{n-4}-1$

ដូចនេះ តួទី n ជានៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ $a_n=2^{n-4}-1$

26. ស្វ៊ីត (a_n) មួយកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $a_1=1, a_2=2$ និង $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$ ។ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។

<u>ចម្លើយ</u>

- កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

យើងមាន: $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$

នាំអោយសមីការសំគាល់នៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ $X^2=2X-1$

ឬ $X^2-2X+1=0$

ឬ $(X-1)^2=0$ កាលណា $X=1$

យើងបាន: $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$

យក (b_n) មួយដែលមានតួទី n កំណត់ដោយ $b_n=a_{n+1}-a_n$

នាំអោយ $b_{n+1}=b_n$

នាំអោយ (b_n) ជាស្វ៊ីតថេរ ដោយ $b_1=a_2-a_1=2-1=1\Rightarrow b_n=1$

នាំអោយ $a_{n+1}-a_n=1$

នាំអោយ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមាន: $a_1=1$, $d=1$

នាំអោយ $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)=n$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ $a_n=n$

27. យក P_n ជាផលគុណ n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល $P_n=n!$ ។

ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

ខ. យក $S_n=a_1^4+a_2^4+a_3^4+...+a_n^4$ ។ កំណត់ S_n ជាអនុគមន៍ n ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

យើងមាន: $P_n=n!$

ចំពោះ $n\geq 2$ យើងបាន: $P_{n-1}=(n-1)!$

នាំអោយ $\qquad \dfrac{P_n}{P_{n-1}} = \dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = n$

ដោយ $\qquad \dfrac{P_n}{P_{n-1}} = a_n$

នាំអោយ $\qquad a_n = n \qquad$ ចំពោះ $n \geq 2$

បើ $n=1$ $\quad$ នាំអោយ $a_1 = 1$

ម្យ៉ាងទៀត: $P_n = n!$ នាំអោយ $a_1 = P_1 = 1! = 1$ ពិត

ដូចនេះ $\qquad a_n = n$ *ចំពោះ* $n = 1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,...$

ខ. កំណត់ S_n ជាអនុគមន៍ n

យើងមាន: $S_n = a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + ... + a_4^n$ ដោយ $a_n = n$

នាំអោយ $\qquad S_n = 1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4$

ប្រើសមភាព $\quad (k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$

នាំអោយ $\qquad (k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$

យក $k = 1\,,\,2\,,\,3\,,\,...,\,n$

យើងបាន: $\qquad 2^5 - 1^5 = 5(1)^4 + 10(1)^3 + 10(1)^2 + 5(1) + 1$

$$3^5 - 2^5 = 5(2)^4 + 10(2)^3 + 10(2)^2 + 5(2) + 1$$

$$4^5 - 3^5 = 5(3)^4 + 10(3)^3 + 10(3)^2 + 5(3) + 1$$

....

$$(n+1)^5 - n^5 = 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$$

បូកអង្គ និង អង្គ:

$$(n+1)^5 - 1 = 5S_n + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k + n$$

រឺ $5S_n=(n+1)^5-(n+1)-10\sum_{k=1}^{n}k^3-10\sum_{k=1}^{n}k^2-5\sum_{k=1}^{n}k$

$$=(n+1)^5-(n+1)-\frac{10n^2(n+1)^2}{4}-\frac{10n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{5n(n+1)}{2}$$

$$=(n+1)^5-(n+1)-\frac{5n^2(n+1)^2}{2}-\frac{10n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{5n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{(n+1)\left[6(n+1)^4-6-5n^2(n+1)-10n(2n+1)-5n\right]}{6}$$

$$=\frac{(n+1)\left[6(n+1)^4-6-5n^2(n+1)-10n(2n+1)-5n\right]}{6}$$

$$=\frac{(n+1)\left[6n(n^3+4n^2+6n+4)-5n^2(n+1)-10n(2n+1)-5n\right]}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(6n^3-9n^2+n-1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{6}$$

នាំអោយ $S_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

28. យក S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល $S_n=n^2+n$ ។

ក. ស្រាយថា (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកើន ។

ខ. យកស្វ៊ីត (b_n) មួយមាន $b_1=1$ ហើយ $a_nb_{n+1}=a_{n+1}b_n+2n(n+1)$ ។

ចម្លើយ

ក. ស្រាយថា (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកើន

យើងមាន: $S_n=n^2+n$

បើ $n\geq 2$ នាំអោយ $S_{n-1}=(n-1)^2+(n-1)=n^2-2n+1+n-1$

នាំអោយ $S_{n-1}=n^2-n$

យើងបាន៖ $S_n - S_{n-1} = n^2 + n - n^2 + n = 2n$

ដោយ $S_n - S_{n-1} = a_n$

នាំអោយ $a_n = 2n$

បើ $n = 1$ នាំអោយ $a_1 = 2$

ហើយ $S_n = n^2 + n$ នាំអោយ $S_1 = 1^2 + 1 = 2$ ពិត

នាំអោយ $a_n = 2n$ ចំពោះ $n = 1, 2, 3, \ldots$

នាំអោយ $a_{n+1} = 2(n+1)$

នាំអោយ $a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 2n = 2 = d > 0$

ដូចនេះ (a_n) *ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកើនមាន៖* $d = 2$

ខ. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (b_n)

យើងមាន៖ $a_n b_{n+1} = a_{n+1} b_n + 2n(n+1)$ ដោយ $a_n = 2n$

នាំអោយ $2nb_{n+1} = 2(n+1)b_n + 2n(n+1)$

នាំអោយ $$\frac{2nb_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{2(n+1)b_n}{n(n+1)} + \frac{2n(n+1)}{n(n+1)}$$

នាំអោយ $\frac{b_{n+1}}{n+1} = \frac{b_n}{n} + 1$ យក $u_n = \frac{b_n}{n}$

នាំអោយ $u_{n+1} = u_n + 1$

នាំអោយ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមាន៖ $u_1 = b_1 = 1$, $d = 1$

តាមរូបមន្ត៖ $u_n = u_1 + (n-1)d$

នាំអោយ $u_n = 1 + (n-1) = n$

យើងបាន៖ $\frac{b_n}{n} = n$ រឺ $b_n = n^2$

ដូចនេះ *តួទី n នៃស្វ៊ីត (b_n) គឺ $b_n = n^2$*

29. គេមាន S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) ហើយ S_n បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$$S_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)a_n \ (n \ge 2)$$ ។

ក. បញ្ជាក់រក a_n $(n \ge 3)$ ជាអនុគមន៍នៃ n និង a_{n-1} ។

ខ. បញ្ជាក់រក S_n $(n \ge 2)$ ជាអនុគមន៍នៃ n និង S_{n-1} ។

គ. ឧបមាថា $a_1 = 1$ ។ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត (S_n) ដែល $(n \ge 1)$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក. បញ្ជាក់រក a_n $(n \ge 3)$ ជាអនុគមន៍នៃ n និង a_{n-1}

យើងមាន: $S_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)a_n$

នាំអោយ $S_{n-1} = \left(\frac{n-1}{n-2}\right)a_{n-1}$

នាំអោយ $S_n - S_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)a_n - \left(\frac{n-1}{n-2}\right)a_{n-1}$

នាំអោយ $(n-1)(n-2)a_n = na_n(n-2) - (n-1)^2 a_{n-1}$

នាំអោយ $n^2 a_n - 3na_n + 2a_n = n^2 a_n - 2na_n - (n-1)^2 a_{n-1}$

នាំអោយ $-na_n + 2a_n = -(n-1)^2 a_{n-1}$

នាំអោយ $(n-2)a_n = (n-1)^2 a_{n-1}$

នាំអោយ $a_n = \frac{(n-1)^2}{(n-2)} a_{n-1}$

ដូចនេះ $a_n = \frac{(n-1)^2}{(n-2)} a_{n-1}$

ខ. បញ្ជាក់រក S_n $(n \ge 2)$ ជាអនុគមន៍នៃ n និង S_{n-1}

យើងមានៈ $S_n = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)a_n$, $(n \geq 2)$ ដោយ $S_n - S_{n-1} = a_n$, $(n \geq 2)$

នាំអោយ $S_n = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)(S_n - S_{n-1})$

នាំអោយ $(n-1)S_n = n(S_n - S_{n-1})$

នាំអោយ $nS_n - S_n = nS_n - nS_{n-1}$

នាំអោយ $S_n = nS_{n-1}$

ដូចនេះ $S_n = nS_{n-1}$, $(n \geq 2)$

គ. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (S_n)

យើងមានៈ $S_i = iS_{i-1}$ ចំពោះ $i = 2, 3, 4, \ldots$

ដោយ $a_1 = S_1 = 1$ នាំអោយ $S_i \neq 0$ ចំពោះ $i = 2, 3, 4, \ldots$

ពី $S_i = iS_{i-1}$ នាំអោយ $\dfrac{S_i}{S_{i-1}} = i$

យក $i = 2, 3, 4, \ldots$ យើងបានៈ

$$\frac{S_2}{S_1} = 2 \ , \frac{S_3}{S_2} = 3 \ , \frac{S_4}{S_3} = 4 \ , \ldots, \ \frac{S_n}{S_{n-1}} = n$$

នាំអោយ $\dfrac{S_2}{S_1} \cdot \dfrac{S_3}{S_2} \cdot \dfrac{S_4}{S_3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{S_n}{S_{n-1}} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

នាំអោយ $\dfrac{S_n}{S_1} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

នាំអោយ $S_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$ ព្រោះ $a_1 = S_1 = 1$

នាំអោយ $S_n = n!$ ចំពោះ $n = 2, 3, 4, \ldots$

បើ $n = 1$ នាំអោយ $S_1 = 1$ ពិត

ដូចនេះ *តួទី n នៃស្វ៊ីត* (S_n) *គឺ* $S_n = n!$

30. គេអោយស៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ $x_1 = 1$ ហើយ $x_{n+1} = 1 + x_1 x_2 ... x_n$ ចំពោះ $n = 1, 2, ...$ ។ គេតាងផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$ ។កំណត់ $\lim_{x \to +\infty} S_n$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

- កំណត់ $\lim_{x \to +\infty} S_n$

យើងមាន: $x_{n+1} = 1 + x_1 x_2 ... x_n$

រឺ $x_{n+1} = 1 + (x_1 x_2 ... x_{n-1}) x_n$

រឺ $x_{n+1} = 1 + [(x_1 x_2 ... x_{n-1} + 1) - 1] x_n$

ដោយ $x_n = 1 + x_1 x_2 ... x_{n-1}$

នាំអោយ $x_{n+1} = 1 + (x_n - 1) x_n$

នាំអោយ $\frac{1}{x_{n+1} - 1} = \frac{1}{(x_n - 1) x_n}$ សមភាពពិតកាលណា $x_{n+1} \neq 1$, $x_n \neq 0$, $x_n \neq 1$

ម្យ៉ាងទៀត: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + x_1 x_2 ... x_n$

នាំអោយ $\frac{1}{x_{n+1} - 1} = \frac{1}{(x_n - 1) x_n}$ មិនពិតចំពោះ $n = 1$

បើ $n \geq 2$ យើងបាន: $\frac{1}{x_{n+1} - 1} = \frac{1}{(x_n - 1) x_n}$

រឺ $\frac{1}{x_{n+1} - 1} = \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_n}$

រឺ $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}$

យើងមាន: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = \frac{1}{x_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x_k}$

$$= \frac{1}{x_1} + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{x_k - 1} - \frac{1}{x_{k+1} - 1}\right)$$

$$= \frac{1}{x_1} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{x_k - 1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{x_{k+1} - 1}$$

$$= \frac{1}{x_1} + \left(\frac{1}{x_2 - 1} + \frac{1}{x_3 - 1} + \dots + \frac{1}{x_n - 1}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{x_3 - 1} + \frac{1}{x_4 - 1} + \dots + \frac{1}{x_{n+1} - 1}\right)$$

$$= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2 - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}$$

$$= 2 - \frac{1}{x_{n+1} - 1}$$

នាំអោយ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{1}{x_{n+1} - 1}\right)$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2 - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_{n+1} - 1} = 2 - 0 = 2$$

ព្រោះ បើ $n \to +\infty$ នាំអោយ $x_{n+1} \to +\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n = 2$

31. គេមានស្វ៊ីត (a_n): $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 6}{a_n - 4}$ ដែល $n = 1, 2, \dots$ ។

ក. ស្រាយថា: $a_n \neq 3$, $a_n \neq 2$ ។

ខ. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត ។

ស្រាយបញ្ជាក់

ក. ស្រាយថា: $a_n \neq 3$, $a_n \neq 2$

- ស្រាយថា: $a_n \neq 3$

បើ $n = 1$ នាំអោយ $a_2 = \dfrac{a_1 - 6}{a_1 - 4} = \dfrac{1-6}{1-4} = \dfrac{5}{3} \neq 3$

ឧបមាថា ពិតដល់ $n = k$ គឺ $a_k \neq 3$

ស្រាយថា: $a_{k+1} \neq 3$

យើងមាន: $a_k \neq 3$ នាំអោយ $a_k - 6 \neq -3$ (1)

ហើយ $a_k - 4 \neq -1$ (2)

ធ្វើផលធៀបរវាង (1) និង (2) យើងបាន: $\dfrac{a_k - 6}{a_k - 4} \neq 3$

នាំអោយ $a_{k+1} \neq 3$ ពិត

ដូចនេះ $a_n \neq 3$

- ស្រាយថា: $a_n \neq 2$

បើ $n = 1$ នាំអោយ $a_2 = \dfrac{a_1 - 6}{a_1 - 4} = \dfrac{1-6}{1-4} = \dfrac{5}{3} \neq 2$

ឧបមាថា ពិតដល់ $n = k$ គឺ $a_k \neq 2$

ស្រាយថា: $a_{k+1} \neq 2$

យើងមាន: $a_k \neq 2$ នាំអោយ $a_k - 6 \neq -4$ (1)

ហើយ $a_k - 4 \neq -2$ (2)

ធ្វើផលធៀបរវាង (1) និង (2) យើងបាន: $\dfrac{a_k - 6}{a_k - 4} \neq 2$

នាំអោយ $a_{k+1} \neq 2$ ពិត

ដូចនេះ $a_n \neq 2$

ខ. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត

សមីការសំគាល់នៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ $x = \frac{x-6}{x-4}$

នាំអោយ $x^2 - 5x + 6 = 0$ សមីការមានរឹស $x = 2$, $x = 3$

របៀបទី 1

តាង $b_n = \frac{1}{a_n - 2}$ នាំអោយ $b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1} - 2} = \frac{1}{\frac{a_n - 6}{a_n - 4} - 2}$

$$= \frac{a_n - 4}{-a_n + 2} = -1 + \frac{2}{a_n - 2}$$

នាំអោយ $b_{n+1} = 2b_n - 1$

ស្វ៊ីតជំនួយនៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ ស្វ៊ីត (r_n) កំណត់ដោយ $r_n = a$

ដោយ $b_{n+1} = 2b_n - 1$ （1）

យើងបានៈ $r_{n+1} = 2r_n - 1$

រឺ $a = 2a - 1$

រឺ $a = 1$

នាំអោយ $r_n = 1$

ពី $r_{n+1} = 2r_n - 1$

នាំអោយ $1 = 2(1) - 1$ （2）

ធ្វើផលសងរវាង（1）និង（2）: $(b_{n+1} - 1) = 2(b_n - 1)$

តាង $u_n = b_n - 1$ នាំអោយ $u_{n+1} = b_{n+1} - 1$

នាំអោយ $u_{n+1} = 2u_n$

នាំអោយ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន រេសុង $q = 2$, $u_1 = -2$

នាំអោយ $u_n = -2 \cdot 2^{n-1} = -2^n$

នាំអោយ $b_n = -2^n + 1$

នាំអោយ $-2^n + 1 = \dfrac{1}{a_n - 2}$

នាំអោយ $a_n = \dfrac{1}{1-2^n} + 2$

នាំអោយ $a_n = \dfrac{3-2^{n+1}}{1-2^n}$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) *គឺ* $a_n = \dfrac{2^{n+1}-3}{2^n - 1}$

របៀបទី 2

តាង $b_n = \dfrac{1}{a_n - 3}$ នាំអោយ $b_{n+1} = \dfrac{1}{a_{n+1} - 3}$

នាំអោយ $b_{n+1} = \dfrac{1}{\dfrac{a_n - 6}{a_n - 4} - 3} = \dfrac{a_n - 4}{-2a_n + 6} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-a_n + 4}{a_n - 3}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n - 3} - 1\right)$$

នាំអោយ $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n - \dfrac{1}{2}$

ស្វ៊ីតជំនួយនៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ ស្វ៊ីត (r_n) កំណត់ដោយ $r_n = a$

ដោយ $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n - \dfrac{1}{2}$ (1)

យើងបាន: $r_{n+1} = \dfrac{1}{2}r_n - \dfrac{1}{2}$

ឬ $a=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}$

ឬ $a=-1$

នាំអោយ $r_n=1$ ពី $r_{n+1}=\frac{1}{2}r_n-\frac{1}{2}$

នាំអោយ $-1=\frac{1}{2}(-1)-\frac{1}{2}$ （2）

ធ្វើផលសងរវាង（1）និង（2）: $b_{n+1}+1=\frac{1}{2}(b_n+1)$

តាង $u_n=b_n+1$ នាំអោយ $u_{n+1}=b_{n+1}+1$

នាំអោយ $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n$

នាំអោយ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន $u_1=b_1+1=\frac{1}{a_1-3}+1=\frac{1}{2}$,

$q=\frac{1}{2}$ នាំអោយ $u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

យើងបាន: $b_n+1=\frac{1}{2^n}$ ឬ $b_n=\frac{1-2^n}{2^n}$

ឬ $\frac{1-2^n}{2^n}=\frac{1}{a_n-3}$

ឬ $a_n=\frac{2^n}{1-2^n}+3$

ឬ $a_n=\frac{2^{n+1}-3}{2^n-1}$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) *គឺ* $a_n=\frac{2^{n+1}-3}{2^n-1}$

របៀបទី 3

តាង $b_n=\dfrac{a_n-3}{a_n-2}$

នាំអោយ $b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}-2}=\dfrac{\dfrac{a_n-6}{a_n-4}-3}{\dfrac{a_n-6}{a_n-4}-2}=\dfrac{2a_n-6}{a_n-2}=2\left(\dfrac{a_n-3}{a_n-2}\right)$

នាំអោយ $b_{n+1}=2b_n$

នាំអោយ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន: $b_1=\dfrac{a_1-3}{a_1-2}=2$, $q=2$

នាំអោយ $b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

យើងបាន: $\dfrac{a_n-3}{a_n-2}=2^n$

ឬ $a_n-3=2^n a_n-2^{n+1}$

ឬ $a_n\left(2^n-1\right)=2^{n+1}-3$

ឬ $a_n=\dfrac{2^{n+1}-3}{2^n-1}$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) *គឺ* $a_n=\dfrac{2^{n+1}-3}{2^n-1}$

របៀបទី 4

តាង $b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n-3}$

នាំអោយ $b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}-3}=\dfrac{\dfrac{a_n-6}{a_n-4}-2}{\dfrac{a_n-6}{a_n-4}-3}=\dfrac{a_n-2}{2a_n-6}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a_n-2}{a_n-3}\right)$

នាំអោយ $b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n$

នាំអោយ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន $b_1 = \frac{a_1 - 2}{a_1 - 3} = \frac{1}{2}$ និង $q = \frac{1}{2}$

នាំអោយ $b_n = \frac{1}{2^n}$ យើងបាន: $\frac{a_n - 2}{a_n - 3} = \frac{1}{2^n}$

ឬ $2^n a_n - 2^{n+1} = a_n - 3$

ឬ $a_n(2^n - 1) = 2^{n+1} - 3$

ឬ $a_n = \frac{2^{n+1} - 3}{2^n - 1}$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ $a_n = \frac{2^{n+1} - 3}{2^n - 1}$

32. គេអោយ $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែល

$(3 - a_{n+1})(6 + a_n) = 18$ ហើយ $a_0 = 3$ ។ គណនា $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_i}$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

- គណនា $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_i}$

យើងមាន: $(3 - a_{n+1})(6 + a_n) = 18$ នាំអោយ $3a_n - 6a_{n+1} - a_n a_{n+1} = 0$

នាំអោយ $a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 6}$

សមីការសម្គាល់នៃស្វ៊ីតគឺ $X = \frac{3X}{X + 6}$ ឬ $X^2 - 3X = 0$

កាលណា $X = 0$, $X = 3$

យើងតាង $\frac{1}{a_n} = b_n$ ដែល $n = 1, 2, 3, ..$

យើងបាន: $\left(3 - \frac{1}{b_{n+1}}\right)\left(6 + \frac{1}{b_n}\right) = 18$

រឺ $$18+\frac{3}{b_n}-\frac{6}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_n b_{n+1}}=18$$

រឺ $$3b_{n+1}-6b_n-1=0$$

រឺ $$b_{n+1}=2b_n+\frac{1}{3}$$

នាំអោយ ស្វ៊ីតជំនួយនៃ (a_n) គឺ (r_n) ដែល $r_n=a$

ដោយ $$b_{n+1}=2b_n+\frac{1}{3} \quad (1)$$

នាំអោយ $$r_{n+1}=2r_n+\frac{1}{3}$$

នាំអោយ $a=2a+\frac{1}{3}$ នាំអោយ $a=-\frac{1}{3}$

ពី $r_{n+1}=2r_n+\frac{1}{3}$ នាំអោយ $-\frac{1}{3}=2\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}$ (2)

ធ្វើផលសងរវាង (1) និង (2): $b_{n+1}+\frac{1}{3}=2\left(b_n+\frac{1}{3}\right)$

នាំអោយ $\left(b_n+\frac{1}{3}\right)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន $q=2$, $b_0=\frac{1}{a_0}=\frac{1}{3}$

យើងបាន: $$b_n+\frac{1}{3}=2^n\left(b_0+\frac{1}{3}\right)$$

នាំអោយ $$b_n+\frac{1}{3}=2^n\left(\frac{2}{3}\right)$$

នាំអោយ $$b_n=\frac{2^{n+1}-1}{3}$$

នាំអោយ $$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}=\sum_{i=0}^{n}b_i=\sum_{i=0}^{n}\frac{2^{i+1}-1}{3}=\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n}2^{i+1}-\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{2\left(2^{n+1}-1\right)}{2-1}\right]-\frac{1}{3}(n+1)=\frac{1}{3}\left(2^{n+2}-n-3\right)$$

ដូចនេះ $$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}=\frac{1}{3}\left(2^{n+2}-n-3\right)$$

សម្គាល់: របៀបផ្សេងៗទៀតសូមមើល *លំហាត់ 31*

33. ស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1$, $u_2=1$, $u_3=-1$ ហើយ $u_n=u_{n-1}\times u_{n-3}$ ចំពោះ $n\geq 4$ ។ រកម្ភៃតួដំបូង និង តួ u_{2008} នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

ចម្លើយ

- រកម្ភៃតួដំបូង និង តួ u_{2008} នៃស្វ៊ីត (u_n)

យើងមាន: $u_1=1$, $u_2=1$, $u_3=-1$ ហើយ $u_n=u_{n-1}\times u_{n-3}$ ចំពោះ $n\geq 4$

បើ $n=4$ នាំអោយ $u_4=u_3\times u_1=(-1)(1)=-1$

បើ $n=5$ នាំអោយ $u_5=u_4\times u_2=(-1)(1)=-1$

បើ $n=6$ នាំអោយ $u_6=u_5\times u_3=(-1)(-1)=1$

បើ $n=7$ នាំអោយ $u_7=u_6\times u_4=(1)(-1)=-1$

បើ $n=8$ នាំអោយ $u_8=u_7\times u_5=(-1)(-1)=1$

បើ $n=9$ នាំអោយ $u_9=u_8\times u_6=(1)(1)=1$

បើ $n=10$ នាំអោយ $u_{10}=u_9\times u_7=(1)(-1)=-1$

បើ $n=11$ នាំអោយ $u_{11}=u_{10}\times u_8=(-1)(1)=-1$

បើ $n=12$ នាំអោយ $u_{12}=u_{11}\times u_9=(-1)(1)=-1$

បើ $n=13$ នាំអោយ $u_{13}=u_{12}\times u_{10}=(-1)(-1)=1$

បើ $n=14$ នាំអោយ $u_{14}=u_{13}\times u_{11}=(1)(-1)=-1$

បើ $n=15$ នាំអោយ $u_{15}=u_{14}\times u_{12}=(-1)(-1)=1$

បើ $n=16$ នាំអោយ $u_{16}=u_{15}\times u_{13}=(1)(1)=1$

បើ $n=17$ នាំអោយ $u_{17}=u_{16}\times u_{14}=(1)(-1)=-1$

បើ $n=18$ នាំអោយ $u_{18}=u_{17}\times u_{15}=(-1)(1)=-1$

បើ $n=19$ នាំអោយ $u_{19}=u_{18}\times u_{16}=(-1)(1)=-1$

បើ $n=20$ នាំអោយ $u_{20}=u_{19}\times u_{18}=(-1)(-1)=1$

ដូចនេះ តម្លៃតួដំបូងនៃស្វីត (u_n) *គឺ*

$1,1,-1,-1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,-1,1$

- រកតួ u_{2008} នៃស្វ៊ីត (u_n)

តាមការគណនាខាងលើយើងឃើញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតខួប ហើយខួបនីមួយៗមាន 7 តួ

ដោយ $2008=7\times 286+6$

នាំអោយ $u_{2008}=u_6=1$ ព្រោះ $u_6=1$

ដូចនេះ $u_{2008}=1$

34. គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួន $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ កំណត់ដោយ $x_1=1$, $x_2=1$ ហើយ

$x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$ ចំពោះ $n\geq 3$ ។

ក. រកដប់តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ

ខ. គេយក $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ 2 ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$A^n=\begin{bmatrix}x_{n+1} & x_n\\ x_n & x_{n-1}\end{bmatrix}$ ចំពោះ $n=2,3,4,...$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់

ក. រកដប់តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ

យើងមានៈ $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ ហើយ $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ ចំពោះ $n \geq 3$

បើ $n = 3$ នាំអោយ $x_3 = x_2 + x_1 = 1 + 1 = 2$

បើ $n = 4$ នាំអោយ $x_4 = x_3 + x_2 = 2 + 1 = 3$

បើ $n = 5$ នាំអោយ $x_5 = x_4 + x_3 = 3 + 2 = 5$

បើ $n = 6$ នាំអោយ $x_6 = x_5 + x_4 = 5 + 3 = 8$

បើ $n = 7$ នាំអោយ $x_7 = x_6 + x_5 = 8 + 5 = 13$

បើ $n = 8$ នាំអោយ $x_8 = x_7 + x_6 = 13 + 8 = 21$

បើ $n = 9$ នាំអោយ $x_9 = x_8 + x_7 = 21 + 13 = 34$

បើ $n = 10$ នាំអោយ $x_{10} = x_9 + x_8 = 34 + 21 = 55$

ដូចនេះ ដប់តួដំបូងនៃស៊ីតគឺ $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A^n = \begin{bmatrix} x_{n+1} & x_n \\ x_n & x_{n-1} \end{bmatrix}$

បើ $n = 2$ នាំអោយ $A^2 = \begin{bmatrix} x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ （1）

ដោយ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ នាំអោយ $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 \end{bmatrix}$

នាំអោយ $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ （2）

តាម（1）និង（2）យើងបានៈ $A^n = \begin{bmatrix} x_{n+1} & x_n \\ x_n & x_{n-1} \end{bmatrix}$ ពិតចំពោះ $n = 2$

ឧបមាថា $A^n = \begin{bmatrix} x_{n+1} & x_n \\ x_n & x_{n-1} \end{bmatrix}$ ពិតចំពោះ $n = k$

នាំអោយ $A^k = \begin{bmatrix} x_{k+1} & x_k \\ x_k & x_{k-1} \end{bmatrix}$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A^n = \begin{bmatrix} x_{n+1} & x_n \\ x_n & x_{n-1} \end{bmatrix}$ ពិតចំពោះ $n = k+1$

គឺ ស្រាយថា $A^{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+2} & x_{k+1} \\ x_{k+1} & x_k \end{bmatrix}$

យើងមានៈ $A^k = \begin{bmatrix} x_{k+1} & x_k \\ x_k & x_{k-1} \end{bmatrix}$

នាំអោយ $A^{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1} & x_k \\ x_k & x_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

នាំអោយ $A^{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1} + x_k & x_{k+1} + 0 \\ x_k + x_{k-1} & x_k + 0 \end{bmatrix}$

នាំអោយ $A^{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+2} & x_{k+1} \\ x_{k+1} & x_k \end{bmatrix}$ ពិត

ដូចនេះ $A^n = \begin{bmatrix} x_{n+1} & x_n \\ x_n & x_{n-1} \end{bmatrix}$ *ចំពោះ* $n = 2,3,4,...$

35. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត (x_n) បើគេដឹងថា $x_0 = 3$, $x_1 = 4$ ហើយ $x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n$ ចំពោះ $n \in IN$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

- រកតួទី n នៃស្វ៊ីត (x_n)

យើងមានៈ $x_0 = 3$, $x_1 = 4$ ហើយ $x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n$

បើ $n = 1$ នាំអោយ $x_2 = x_0^2 - x_1 = 3^2 - 4 = 5$

បើ $n = 2$ នាំអោយ $x_3 = x_1^2 - 2x_2 = 4^2 - 2(5) = 6$

ឧបមាថាៈ $x_k = k+3$ ចំពោះ $k = 0,1,2,...$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x_{k+1}=k+4$

យើងមានៈ $x_k=k+3$ ចំពោះ $k\in IN$

នាំអោយ $x_k=k+3$ ហើយ $x_{k-1}=k+2$

ពី $x_{k+1}=x_{k-1}^2-kx_k$

នាំអោយ $x_{k+1}=(k+2)^2-k(k+3)$

នាំអោយ $x_{k+1}=k+4$ ពិត

ដូចនេះ $x_n=n+3$ *ចំពោះ* $k=0,1,2,...$

36. ស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1=1$, $x_2=1$ និង $x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 2$ ។ ស្វ៊ីត (y_n) កំណត់ដោយ $y_n=|x_{n+4}x_{n-2}-x_{n+2}x_n|$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 3$ ។ ស្វ៊ីត (z_n) កំណត់ដោយ $z_n-9=4x_{n-2}x_nx_{n+2}x_{n+4}$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 3$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា (y_n) ជាស្វ៊ីតថេរ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 3$ ។ ទាញរកតម្លៃ $y_{3042011}$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា តួនីមួយៗនៃស្វ៊ីត (z_n) ជាការេប្រាកដ ។

ស្រាយបញ្ជាក់

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា (y_n) ជាស្វ៊ីតថេរ

យើងមានៈ $x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$

នាំអោយ $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$

នាំអោយ $x_{n+2}=2x_n+x_{n-1}$

នាំអោយ $x_{n+3}=2x_{n+1}+x_n$

នាំអោយ $x_{n+3}=2x_{n-1}+3x_n$

នាំអោយ $x_{n+4}=2x_n+3x_{n+1}$

នាំអោយ $x_{n+4}=5x_n+3x_{n-1}$

នាំអោយ $x_{n+5}=5x_{n+1}+3x_n$

នាំអោយ $x_{n+5}=8x_n+5x_{n-1}$

យើងបាន: $y_n=\left|x_{n+4}x_{n-2}-x_{n+2}x_n\right|$

$$=\left|(5x_n+3x_{n-1})(x_n-x_{n-1})-x_n(2x_n+x_{n-1})\right|$$

ព្រោះ $x_{n-2}=x_n-x_{n-1}$

នាំអោយ $y_n=\left|5x_n^2-2x_{n-1}x_n-3x_{n-1}^2-2x_n^2-x_nx_{x-1}\right|$

នាំអោយ $y_n=\left|3x_n^2-3x_{n-1}x_n-3x_{n-1}^2\right|\quad(1)$

ម៉្យាងទៀត: $y_{n+1}=\left|x_{n+5}x_{n-1}-x_{n+3}x_{n+1}\right|$

នាំអោយ $y_{n+1}=\left|(8x_n+5x_{n-1})x_{n-1}-(x_n+x_{x-1})(3x_n+2x_{n-1})\right|$

នាំអោយ $y_{n+1}=\left|5x_{n-1}^2+8x_{n-1}x_n-3x_n^2-5x_{n-1}x_n-2x_{n-1}^2\right|$

នាំអោយ $y_{n+1}=\left|-3x_n^2-3x_{n-1}x_n+3x_{n-1}^2\right|$

នាំអោយ $y_{n+1}=\left|3x_n^2-3x_{n-1}x_n-3x_{n-1}^2\right|\quad(2)$

តាម (1) និង (2) យើងបាន: $y_{n+1}=y_n$ ចំពោះ $\forall n\geq 3$

ដូចនេះ *ស៊ីត (y_n) ជាស៊ីតថេរចំពោះ $n\geq 3$*

- ទាញរក $y_{3042011}$

យើងមាន: (y_n) ជាស៊ីតថេរចំពោះ $\forall n\geq 3$

នាំអោយ $y_{3042011}=y_3$

ដោយ $y_3 = |x_7 x_1 - x_5 x_3|$ ហើយ $x_1 = 1\,,\, x_2 = 2$

នាំអោយ $x_3 = x_2 + x_1 = 3\,,\, x_5 = 2x_1 + 3x_2 = 8$

$x_7 = x_6 + x_5 = 2x_5 + x_4 = 2x_5 + x_3 + x_2 = 21$

នាំអោយ $y_{3042011} = y_3 = |(21)(1) - (3)(8)| = 3$

ដូចនេះ $y_{3042011} = 3$

ខ.ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់តួនីមួយៗនៃស្វ៊ីត (z_n) ជាការេប្រាកដ

យើងមាន: $y_n = |x_{n+4}x_{n-2} - x_{n+2}x_n|$

នាំអោយ $y_n^2 = x_{n+4}^2 x_{n-2}^2 - 2x_{n-2}x_n x_{n+2}x_{n+4} + x_{n+2}^2 x_n^2$

នាំអោយ $y_n^2 + 4x_{x-2}x_n x_{n+2}x_{n+4} = (x_{n+4}x_{n-2} + x_{n+2}x_n)^2$

ដោយ $y_n = 3\ \forall n \geq 3$

នាំអោយ $9 + 4x_{n-2}x_n x_{n+2}x_{n+4} = (x_{n+4}x_{n-2} + x_{n+2}x_n)^2$

នាំអោយ $z_n = (x_{n+4}x_{n-2} + x_{n+2}x_n)^2$

ពី $x_1 = 1\,,\, x_2 = 2 \Rightarrow x_{n+4}x_{n-2} + x_{n+2}x_n \in IN$ ចំពោះ $\forall n \geq 3$

ដូចនេះ *គ្រប់តួនីមួយៗនៃស្វ៊ីត* (z_n) *ជាការេប្រាកដចំពោះ* $\forall n \geq 3$

37.គេអោយស្វ៊ីតចំនួនពិត $u_1, u_2, ..., u_n$ បំពេញទំនាក់ទំនង

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 - u_{n-1} + 2u_n}{u_{n-1} + 1}\ , u_1 = 1, u_9 = 7$$ ។គណនាតម្លៃនៃ u_5 ។

ចម្លើយ

គណនាតម្លៃនៃ u_5

យើងមាន: $$u_{n+1} = \frac{u_n^2 - u_{n-1} + 2u_n}{u_{n-1} + 1}$$

នាំអោយ $u_{n+1}+1=\dfrac{u_n^2-u_{n-1}+2u_n}{u_{n-1}+1}+1$

នាំអោយ $u_{n+1}+1=\dfrac{(u_n-1)^2}{u_{n-1}+1}$

នាំអោយ $(u_{n+1}+1)(u_{n-1}+1)=(u_n-1)^2$

តាង $a_n=u_{n+1}$ នាំអោយ $a_{n+1}.a_{n-1}=a_n^2$

នាំអោយ (a_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

នាំអោយ $a_5^2=a_1a_9=(1+1)(7+1)=16$

នាំអោយ $a_5=4$ រឺ $a_5=-4$ ដោយ $a_5=a_1q^4$

នាំអោយ a_1 , a_5 មានសញ្ញាដូចគ្នា

យើងបាន: $a_5=4$ ហើយ $u_5+1=a_5$

នាំអោយ $u_5=a_5-1=4-1=3$

ដូចនេះ $u_5=3$

38. គណនាតម្លៃ:

$$M=\frac{1+2}{2}+\frac{1+2+3}{2^2}+\frac{1+2+3+4}{2^3}+\frac{1+2+3+4+5}{2^4}+\dots$$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

- គណនាតម្លៃ M

យើងមាន: $M=\dfrac{1+2}{2}+\dfrac{1+2+3}{2^2}+\dfrac{1+2+3+4}{2^3}+\dfrac{1+2+3+4+5}{2^4}+\dots$

រឺ $\dfrac{M}{2}=\dfrac{1+2}{2^2}+\dfrac{1+2+3}{2^3}+\dfrac{1+2+3+4}{2^4}+\dfrac{1+2+3+4+5}{2^5}+\dots$

នាំអោយ $M-\dfrac{M}{2}=\dfrac{1+2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+\dfrac{5}{2^4}+\dots$

ឬ $\dfrac{M}{2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+\dfrac{5}{2^4}+...$

ឬ $\dfrac{M}{4}=\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{4}{2^4}+\dfrac{5}{2^5}+...$

នាំអោយ $\dfrac{M}{2}-\dfrac{M}{4}=\dfrac{3}{2}+0+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{2^5}+...$

ឬ $\dfrac{M}{4}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2}}$

ឬ $\dfrac{M}{4}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{4}$

ឬ $M=7$

ដូចនេះ $M=7$

39. គណនាផលបូក $S=\sum_{k=0}^{2007}\dfrac{x_k^3}{1-3x_k+3x_k^2}$ ចំពោះ $x_k=\dfrac{k}{2007}$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

- គណនាផលបូក S

របៀបទី1

យើងមាន: $S=\sum_{k=0}^{2007}\dfrac{x_k^3}{1-3x_k+3x_k^2}$ ដោយ $x_k=\dfrac{k}{2007}$ ។

នាំអោយ $S=\sum_{k=0}^{2007}\dfrac{\left(\dfrac{k}{2007}\right)^3}{1-3\left(\dfrac{k}{2007}\right)+3\left(\dfrac{k}{2007}\right)^2}$

នាំអោយ $S=\sum_{k=0}^{2007}\frac{\left(\frac{k}{2007}\right)^3}{\frac{2007^2-3(2007)k+3k^2}{2007^2}}$

នាំអោយ $S=\sum_{k=0}^{2007}\frac{k^3}{2007^3-3(2007^2)k+3(2007)k^2}$

នាំអោយ $S=\sum_{k=0}^{2007}\frac{k^3}{(2007-k)^3+k^3}$

នាំអោយ

$$S=\frac{1^3}{2006^3+1^3}+\frac{2^3}{2006^3+2^3}+\frac{3^3}{2006^3+3^3}+...+\frac{2006^3}{1^3+2006^3}+1$$

នាំអោយ

$$S=1+\frac{2006^3}{1^3+2006^3}+\frac{2005^3}{2^3+2005^3}+\frac{2004^3}{3^3+2004^3}+...+\frac{1^3}{1^3+2006^3}$$

យើងបាន : $2S=\underbrace{1+1+1+...+1}_{2008\text{តួ}}$ នាំអោយ $S=1004$

ដូចនេះ $S=1004$

របៀបទី 2

តាង $f(x)=\frac{x^3}{1-3x+3x^2}$ នាំអោយ $f(x)=\frac{x^3}{x^3+(1-x)^3}$ (1)

នាំអោយ $f(1-x)=\frac{(1-x)^3}{(1-x)^3+x^3}$ (2)

បូក $(1),(2)$ យើងបាន : $f(x)+f(1-x)=1$

ដោយ $x_k=\frac{k}{2007}$ នាំអោយ $1-x_k=\frac{2007-k}{2007}=x_{2007-k}$

នាំអោយ $f(x_k)+f(x_{2007-k})=1$

យើងមាន : $S=\sum_{k=0}^{2007} f\left(x_k\right)=\sum_{k=0}^{2007} f\left(x_{2007-k}\right)$

រឺ $2S=\sum_{k=0}^{2007}\left[f\left(x_k\right)+f\left(x_{2007-k}\right)\right]=2008$

នាំអោយ $S=1004$

ដូចនេះ $S=1004$

40.គេអោយស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន$\left(u_m\right)$កំណត់ដូចខាងក្រោម :

$\begin{cases} u_0=3, u_1=17 \\ u_n=6u_{n-1}-u_{n-2} \;,\; n=2,3,\ldots \end{cases}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: u_u^2-1 ចែកដាច់នឹង 2 ។

ស្រាយបញ្ជាក់

- ស្រាយបញ្ជាក់ថា: u_u^2-1 ចែកដាច់នឹង 2

យើងមាន: $u_0=3\ ,\ u_1=17$

នាំអោយ $u_0^2-1=9-1=8\ \vdots 2$

នាំអោយ $u_0^2-1=289-1=288\ \vdots 2$

ចំពោះ $n\geq 2\ ,\ u_n=6u_{n-1}-u_{n-2}$

នាំអោយ $u_n-3u_{n-1}=3u_{n-1}-u_{n-2}$

នាំអោយ $\left(u_n-3u_{n-1}\right)^2=\left(3u_{n-1}-u_{n-2}\right)^2$

នាំអោយ $u_n^2-6u_nu_{n-1}+9u_{n-1}^2=9u_{n-1}^2-6u_{n-1}u_{n-2}+u_{n-2}^2$

នាំអោយ $u_n^2-6u_nu_{n-1}=u_{n-2}^2-6u_{n-1}u_{n-2}$

យក $n=2,3,\ldots,k$ យើងបាន:

$u_2^2-6u_2u_1=u_0^2-6u_1u_0$

$u_3^2 - 6u_3u_2 = u_1^2 - 6u_2u_1$

$u_4^2 - 6u_4u_3 = u_2^2 - 6u_3u_2$

....

$u_k^2 - 6u_ku_{k-1} = u_{k-2}^2 - 6u_{k-1}u_{k-2}$

បូកអង្គ និង អង្គ: $u_k^2 + u_{k-1}^2 - 6u_ku_{k-1} = u_0^2 + u_1^2 - 6u_1u_0$

រឺ $u_k^2 + u_{k-1}^2 - 6u_ku_{k-1} = 3^2 + 17^2 - 6(3)(7) = -8$

រឺ $8(u_k^2 - 1) = (3u_k - u_{k-1})^2$

រឺ $u_k^2 - 1 = \dfrac{(3u_k - u_{k-1})^2}{8} \quad (k = 2, 3, ...)$

ដោយ $u_0 = 3, u_1 = 17$ ហើយ $u_n = 6u_{n-1} - u_{n-2}$

នាំអោយ $u_k \in Z \quad (k = 0, 1, 2, ...)$

នាំអោយ $u_k^2 - 1 \in Z$

នាំអោយ $u_k^2 - 1 = \dfrac{(3u_k - u_{k-1})^2}{8}$ ពិត

នាំអោយ $(3u_k - u_{k-1})^2 \vdots\ 8$

នាំអោយ $3u_k - u_{k-1} \vdots\ 4$

យក $3u_k - u_{k-1} = 4t \quad (t \in Z)$

នាំអោយ $u_k^2 - 1 = \dfrac{(4t)^2}{8} = 2t^2 \vdots\ 2$

ដូចនេះ $u_k^2 - 1 \vdots\ 2 \quad \forall n = 0, 1, 2...$

41. គេអោយស្វ៊ីត (u_n) មួយកំណត់ដោយ $u_0 = a, u_1 = b$ ហើយ

$u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n-2}}{2}$ បើ $n \geq 2$ ។ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{a+2b}{3}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់

- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim_{n\to\infty} u_n = \dfrac{a+2b}{3}$

យើងមាន: $u_n = \dfrac{u_{n-1}+u_{n-2}}{2}$ បើ $n \geq 2$

នាំអោយ $2u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

នាំអោយ $2u_n - u_{n-1} - u_{n-2} = 0$

សមីការសំគាល់: $2X^2 - X - 1 = 0$ រាងពិសេស $a+b+c=0$

នាំអោយ $\alpha = 1, \beta = -\dfrac{1}{2}$

យើងបាន: $\begin{cases} u_n - \alpha u_{n-1} = \beta(u_{n-1} - \alpha u_{n-2}) \\ u_n - \beta u_{n-1} = \alpha(u_{n-1} - \beta u_{n-2}) \end{cases}$

នាំអោយ $\begin{cases} u_n - u_{n-1} = -\dfrac{1}{2}(u_{n-1} - u_{n-2}) & (1) \\ u_n + \dfrac{1}{2}u_{n-1} = u_{n-1} + \dfrac{1}{2}u_{n-2} & (2) \end{cases}$

តាង $a_n = u_{n-1} - u_{n-2}$ នាំអោយ $a_{n+1} = u_n - u_{n-1}$

ពី (1) នាំអោយ $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n$

នាំអោយ (a_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន: $a_2 = u_1 - u_0 = b - a, q = -\dfrac{1}{2}$

នាំអោយ $a_n = a_2 q^{n-2} = (b-a)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$ $(n \geq 2)$

នាំអោយ $u_{n-1} - u_{n-2} = (b-a)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$ $(n \geq 2)$

នាំអោយ $u_n - u_{n-1} = (b-a)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (3) $(n \geq 1)$

តាង $b_n = u_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n-2}$ នាំអោយ $b_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}u_{n-1}$

ពី (2) នាំអោយ $b_{n+1} = b_n$

នាំអោយ (b_n) ជាស្វ៊ីតថេរ ដោយ $b_2 = u_1 + \frac{1}{2}u_0 = \frac{2b+a}{2}$

នាំអោយ $b_{n+1} = \frac{2b+a}{2}$

នាំអោយ $u_n + \frac{1}{2}u_{n-1} = \frac{2b+a}{2}$

នាំអោយ $2u_n + u_{n-1} = 2b + a$ (4)

បូក (3),(4) យើងបាន: $3u_n = (2b+a) + (b-a)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

រឺ $u_n = \frac{2b+a}{3} + \frac{1}{3}(b-a)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

នាំអោយ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{a+2b}{3} + \frac{1}{3}(b-a)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = \frac{a+2b}{3}$

ព្រោះ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}(b-a)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{a+2b}{3}$

42.ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $f(n) = 3^{2n} + 7$ ចែកដាច់នឹង 8 គ្រប់ $n \in IN$

ស្រាយបញ្ជាក់

- ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $f(n)=3^{2n}+7$ ចែកដាច់នឹង 8 គ្រប់ $n\in IN$

របៀបទី 1

បើ $n=1$ នាំអោយ $f(1)=3^2+7=16$ ចែកដាច់នឹង 8

ឧបមាថា ពិតដល់ k គឺ $f(k)=3^{2k}+7=8m \qquad (m\in Z)$

ស្រាយថា $f(k+1)$ ចែកដាច់នឹង 8

យើងមាន: $f(n)=3^{2n}+7$

នាំអោយ $f(k+1)=3^{2(k+1)}+7$

នាំអោយ $f(k+1)=3^{2k+2}+7$

នាំអោយ $f(k+1)=9\cdot 3^{2k}+7$

នាំអោយ $f(k+1)=8\cdot 3^{2k}+3^{2k}+7$

នាំអោយ $f(k+1)=8\cdot 3^{2k}+8m=8\left(3^{2k}+m\right)$ ចែកដាច់នឹង 8

ដូចនេះ $f(n)=3^{2n}+7$ *ចែកដាច់នឹង* 8 *គ្រប់* $n\in IN$

របៀបទី 2

យើងមាន: $f(n)=3^{2n}+7=9^n+7=(8+1)^n+7$

តាមទ្រឹស្តីបទទ្វេធា:

$$(x+y)^n=\sum_{r=0}^{n}C(n,r)x^{n-r}y^r=C(n,0)x^n+C(n,1)x^{n-1}y^1+\ldots+C(n,n)y^n$$

នាំអោយ $f(n)=C(n,0)8^n+C(n,0)8^{n-1}+\ldots+C(n,n-1)8+C(n,n)+7$

នាំអោយ

$$f(n)=C(n,0)8^n+C(n,0)8^{n-1}+\ldots+C(n,n-1)8+C(n,n)+7$$

នាំអោយ $f(n)=C(n,0)8^n+C(n,0)8^{n-1}+\ldots+C(n,n-1)8+8$

នាំអោយ $f(n)=8[C(n,0)8^{n-1}+C(n,0)8^{n-2}+...+C(n,n-1)+1]$

ចែកដាច់នឹង 8

ព្រោះ $C(n,0)8^{n-1}+C(n,0)8^{n-2}+...+C(n,n-1)+1\in IN$

ដូចនេះ $f(n)=3^{2n}+7$ *ចែកដាច់នឹង* 8 *គ្រប់* $n\in IN$

របៀបទី3

យើងមាន: $3^{2n}=9^{n}\equiv 1 \pmod 8$ ចំពោះ $n\in IN$

នាំអោយ $3^{2n}+7\equiv 0 \pmod 8$

ដូចនេះ $f(n)=3^{2n}+7$ *ចែកដាច់នឹង* 8 *គ្រប់* $n\in IN$

43. ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $8^{n}-3^{n}$ ចែកដាច់នឹង 5 ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់

- ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $8^{n}-3^{n}$ ចែកដាច់នឹង 5

របៀបទី1

តាង $f(n)=8^{n}-3^{n}$

បើ $n=1$ នាំអោយ $f(1)=5$ ចែកដាច់នឹង 5

ឧបមាថាពិតដល់ k គឺ $f(k)=8^{k}-3^{k}=5m \quad (m\in IN)$

ស្រាយថា $f(k+1)$ ចែកដាច់នឹង 5

យើងមាន: $f(k+1)=8^{k+1}-3^{k+1}$

នាំអោយ $f(k+1)=8\cdot 8^{k}-3\cdot 3^{k}=5\cdot 8^{k}+3(8^{k}-3^{k})$

នាំអោយ $f(k+1)=5\cdot 8^{k}+5m=5(8^{k}+m)$ ចែកដាច់នឹង 5

ដូចនេះ $8^{n}-3^{n}$ *ចែកដាច់នឹង* 5

របៀបទី2

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ យើងមាន:

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

នាំអោយ $8^n - 3^n = (8-3)(8^{n-1} + 8^{n-2}\cdot 3 + \ldots + 8\cdot 3^{n-2} + 3^{n-1})$

នាំអោយ $8^n - 3^n = 5(8^{n-1} + 8^{n-2}\cdot 3 + \ldots + 8\cdot 3^{n-2} + 3^{n-1})$

ដោយ $8^{n-1} + 8^{n-2}\cdot 3 + \ldots + 8\cdot 3^{n-2} + 3^{n-1}$ ជាចំនួនគត់

នាំអោយ $8^n - 3^n$ ចែកដាច់នឹង 5

ដូចនេះ $8^n - 3^n$ *ចែកដាច់នឹង* 5

របៀបទី3

យើងមាន: $8 \equiv 3 \pmod 5$ នាំអោយ $8^n \equiv 3^n \pmod 5$

នាំអោយ $8^n - 3^n \equiv 0 \pmod 5$

ដូចនេះ $8^n - 3^n$ *ចែកដាច់នឹង* 5

44. ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ។ ស្រាយថា:

$$2\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 3^2 + \ldots + (n+1)\cdot n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$$

$n \in IN$ ។

<u>ស្រាយបញ្ជាក់</u>

- ស្រាយថា:

$$2\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 3^2 + \ldots + (n+1)\cdot n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$$

បើ $n = 1$ នាំអោយ $2\cdot 1^2 = \frac{1(1+1)(1+2)(3+1)}{12}$ រឺ $2 = 2$ ពិត

ឧបមាថាពិតដល់ $n=k$ គឺ

$$2\cdot 1^2+3\cdot 2^2+4\cdot 3^2+\ldots+(k+1)\cdot k^2=\frac{k(k+1)(k+2)(3k+1)}{12}$$

យើងនឹងស្រាយថា $n=k+1$ ពិត គឺ ស្រាយថា៖

$$2\cdot 1^2+3\cdot 2^2+\ldots+(k+1)k^2+(k+2)(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(3k+4)}{12}$$

យើងមាន៖

$$2\cdot 1^2+3\cdot 2^2+4\cdot 3^2+\ldots+(k+1)\cdot k^2=\frac{k(k+1)(k+2)(3k+1)}{12}$$

នាំអោយ $2\cdot 1^2+3\cdot 2^2+\ldots+(k+1)k^2+(k+2)(k+1)^2$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)(3k+1)}{12}+(k+2)(k+1)^2$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)[k(3k+1)+12(k+1)]}{12}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(3k^2+13k+12)}{12}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(3k+4)}{12}$$ ពិត

ដូចនេះ $2\cdot 1^2+3\cdot 2^2+4\cdot 3^2+\ldots+(n+1)\cdot n^2=\dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$

45. ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$\left(1-\dfrac{4}{1^2}\right)\left(1-\dfrac{4}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{4}{5^2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{4}{(2n-1)^2}\right)=\dfrac{1+2n}{1-2n}$ ចំពោះ $n\in IN$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់

- ស្រាយថា $\left(1-\dfrac{4}{1^2}\right)\left(1-\dfrac{4}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{4}{5^2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{4}{(2n-1)^2}\right)=\dfrac{1+2n}{1-2n}$

របៀបទី1

បើ $n=1$ នាំអោយ $1-\frac{4}{1^2}=\frac{1+2}{1-2}$

នាំអោយ $-3=-3$ ពិត

ឧបមាថាពិតដល់ $n=k$ គឺ

$$\left(1-\frac{4}{1^2}\right)\left(1-\frac{4}{3^2}\right)\left(1-\frac{4}{5^2}\right)\dots\left(1-\frac{4}{(2k-1)^2}\right)=\frac{1+2k}{1-2k}$$

ស្រាយថា សមភាពពិតដល់ $n=k+1$ គឺ ស្រាយថា

$$\left(1-\frac{4}{1^2}\right)\left(1-\frac{4}{3^2}\right)\left(1-\frac{4}{5^2}\right)\dots\left(1-\frac{4}{(2k+1)^2}\right)=\frac{1+2(k+1)}{1-2(k+1)}$$

យើងមាន: $\left(1-\frac{4}{1^2}\right)\left(1-\frac{4}{3^2}\right)\left(1-\frac{4}{5^2}\right)\dots\left(1-\frac{4}{(2k+1)^2}\right)$

$$=\left(\frac{1+2k}{1-2k}\right)\left(1-\frac{4}{(2k+1)^2}\right)=\left(\frac{1+2k}{1-2k}\right)\cdot\frac{(2k+1)^2-4}{(1+2k)^2}$$

$$=\left(\frac{1+2k}{1-2k}\right)\cdot\frac{(2k+1)^2-2^2}{(1+2k)^2}=\left(\frac{1+2k}{1-2k}\right)\cdot\frac{(2k+3)(2k-1)}{(1+2k)^2}$$

$$=-\frac{2k+3}{1+2k}=\frac{1+2(k+1)}{1-2(k+1)}$$ ពិត

ដូចនេះ $$\left(1-\frac{4}{1^2}\right)\left(1-\frac{4}{3^2}\right)\left(1-\frac{4}{5^2}\right)\dots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}$$

របៀបទី2

តាង $S_n=\left(1-\frac{4}{1^2}\right)\left(1-\frac{4}{3^2}\right)\left(1-\frac{4}{5^2}\right)\dots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)$

យើងមាន: $1-\frac{4}{(2k-1)^2}=\frac{(2k-1)^2-4}{(2k-1)^2}=\frac{(2k-3)(2k+1)}{(2k-1)^2}$

នាំអោយ $1-\frac{4}{(2k-1)^2}=\frac{2k-3}{2k-1}\cdot\frac{2k+1}{2k-1}$

យក $k = 1\,,\,2\,,\,3\,,\,.\,.\,.\,.\,,\,n$

យើងបាន: $1 - \frac{4}{1^2} = \frac{-1}{1}\cdot\frac{3}{1}$

$$1 - \frac{4}{3^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3}$$

$$1 - \frac{4}{5^2} = \frac{3}{5}\cdot\frac{7}{5}$$

....

$$1 - \frac{4}{(2k-1)^2} = \frac{2n-3}{2n-1}\cdot\frac{2n+1}{2n-1}$$

គុណអង្គ និង អង្គ: $S_n = \left(-\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\dots\frac{2n-3}{2n-1}\right)\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{5}\dots\frac{2n+1}{2n-1}\right)$

នាំអោយ $S_n = -\frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1+2n}{1-2n}$

ដូចនេះ $\left(1-\frac{4}{1^2}\right)\left(1-\frac{4}{3^2}\right)\left(1-\frac{4}{5^2}\right)\dots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}$

46. គេអោយ $p_1 = \frac{1}{2}\left(p_0 + \frac{A}{p_0}\right)$, $p_2 = \frac{1}{2}\left(p_1 + \frac{A}{p_1}\right)$, ... ,

$p_n = \frac{1}{2}\left(p_{n-1} + \frac{A}{p_{n-1}}\right)$ ចំពោះ $n \in IN$, $p_i > 0$, $A > 0$ ។

ស្រាយថា: $\frac{p_n - \sqrt{A}}{p_n + \sqrt{A}} = \left(\frac{p_0 - \sqrt{A}}{p_0 + \sqrt{A}}\right)^{2^n}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់

- ស្រាយថា: $\frac{p_n - \sqrt{A}}{p_n + \sqrt{A}} = \left(\frac{p_0 - \sqrt{A}}{p_0 + \sqrt{A}}\right)^{2^n}$

បើ $n=1$ នាំអោយ $\dfrac{p_1-\sqrt{A}}{p_1+\sqrt{A}}=\left(\dfrac{p_0-\sqrt{A}}{p_0+\sqrt{A}}\right)^2$

តាមសម្មតិកម្ម: $\dfrac{p_1-\sqrt{A}}{p_1+\sqrt{A}}=\dfrac{\frac{1}{2}\left(p_0+\frac{A}{p_0}\right)-\sqrt{A}}{\frac{1}{2}\left(p_0+\frac{A}{p_0}\right)+\sqrt{A}}=\dfrac{p_0^2-2p_0\sqrt{A}+A}{p_0^2+2p_0\sqrt{A}+A}$

នាំអោយ $\dfrac{p_1-\sqrt{A}}{p_1+\sqrt{A}}=\left(\dfrac{p_0-\sqrt{A}}{p_0+\sqrt{A}}\right)^2$ ពិត

ឧបមាថាពិតដល់ $n=k$ គឺ $\dfrac{p_n-\sqrt{A}}{p_n+\sqrt{A}}=\left(\dfrac{p_0-\sqrt{A}}{p_0+\sqrt{A}}\right)^{2^k}$

យើងនឹងស្រាយថា $n=k+1$ ពិត គឺស្រាយថា $\dfrac{p_{k+1}-\sqrt{A}}{p_{k+1}+\sqrt{A}}=\left(\dfrac{p_0-\sqrt{A}}{p_0+\sqrt{A}}\right)^{2^{k+1}}$

យើងមាន: $p_n=\dfrac{1}{2}\left(p_{n-1}+\dfrac{A}{p_{n-1}}\right)$

នាំអោយ $\dfrac{p_{k+1}-\sqrt{A}}{p_{k+1}+\sqrt{A}}=\dfrac{\frac{1}{2}\left(p_k+\frac{A}{p_k}\right)-\sqrt{A}}{\frac{1}{2}\left(p_k+\frac{A}{p_k}\right)+\sqrt{A}}=\dfrac{p_k^2-2p_k\sqrt{A}+A}{p_k^2+2p_k\sqrt{A}+A}$

នាំអោយ $\dfrac{p_{k+1}-\sqrt{A}}{p_{k+1}+\sqrt{A}}=\left(\dfrac{p_k-\sqrt{A}}{p_k+\sqrt{A}}\right)^2$ ដោយ $\dfrac{p_n-\sqrt{A}}{p_n+\sqrt{A}}=\left(\dfrac{p_0-\sqrt{A}}{p_0+\sqrt{A}}\right)^{2^k}$

នាំអោយ $\dfrac{p_{k+1}-\sqrt{A}}{p_{k+1}+\sqrt{A}}=\left[\left(\dfrac{p_0-\sqrt{A}}{p_0+\sqrt{A}}\right)^{2^k}\right]^2$

នាំអោយ $\dfrac{p_{k+1}-\sqrt{A}}{p_{k+1}+\sqrt{A}}=\left(\dfrac{p_0-\sqrt{A}}{p_0+\sqrt{A}}\right)^{2^k\cdot 2}=\left(\dfrac{p_0-\sqrt{A}}{p_0+\sqrt{A}}\right)^{2^{k+1}}$ ពិត

ដូចនេះ $\dfrac{p_n-\sqrt{A}}{p_n+\sqrt{A}}=\left(\dfrac{p_0-\sqrt{A}}{p_0+\sqrt{A}}\right)^{2^n}$

47. ស្វ៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយៈ $x_1=2003$, $x_2=2004$ ហើយ
$x_{n+1}=x_n(x_n-1)+2$ ចំពោះ $n\geq 2$ ។ ស្រាយថាៈ
$(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)...(x_{2004}^2+1)-1=(x_{2005}-1)^2$ ។

<u>ស្រាយបញ្ជាក់</u>

- ស្រាយថាៈ $(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)...(x_{2004}^2+1)-1=(x_{2005}-1)^2$

តាង $S_n=(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)...(x_n^2+1)-1$

យើងនឹងស្រាយថាៈ $S_n=(x_{n+1}-1)^2$

បើ $n=1$ នាំអោយ $x_1^2+1-1=(x_2-1)^2$ ដោយ $x_1=2003$, $x_2=2004$

នាំអោយ $2003^2=2003^2$

ឧបមាថា ពិតដល់ $n=k$ គឺ $S_k=(x_{k+1}-1)^2$

ស្រាយថា $S_{k+1}=(x_{k+2}-1)^2$

យើងមានៈ $S_n=(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)...(x_n^2+1)-1$

នាំអោយ $S_{k+1}=(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)...(x_{k+1}^2+1)-1$

$$=\left[(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)...(x_k^2+1)-1+1\right](x_{k+1}^2+1)-1$$

$$=\left[(x_{k+1}-1)^2+1\right](x_{k+1}^2+1)-1$$

$$=x_{k+1}^2(x_{k+1}-1)^2+(x_{k+1}-1)^2+x_{k+1}^2$$

$$=x_{k+1}^2(x_{k+1}-1)^2+x_{k+1}^2-2x_{k+1}+1+x_{k+1}^2$$

$$= x_{k+1}^2\left(x_{k+1}-1\right)^2+2\left(x_{k+1}^2-x_{k+1}\right)+1$$

$$= x_{k+1}^2\left(x_{k+1}-1\right)^2+2x_{k+1}\left(x_{k+1}-1\right)+1$$

$$= \left[x_{k+1}\left(x_{k+1}-1\right)+2-1\right]^2$$ ដោយ $x_{n+1}=x_n\left(x_n-1\right)+2$

នាំអោយ $S_{k+1}=\left(x_{k+1}-1\right)^2$

បើ $n=2004$ យើងបាន:

$\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)\left(x_3^2+1\right)...\left(x_{2004}^2+1\right)-1=\left(x_{2005}-1\right)^2$

ដូចនេះ $\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)\left(x_3^2+1\right)...\left(x_{2004}^2+1\right)-1=\left(x_{2005}-1\right)^2$

48. តាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាស្រាយថា ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$

$$(1+x)^n\geq 1+nx+\frac{n(n-1)x^2}{2}$$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x>0$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់

- ស្រាយថា: $(1+x)^n\geq 1+nx+\dfrac{n(n-1)x^2}{2}$

បើ $n=1$ នាំអោយ $1+x\geq 1+x$ ពិត

ឧបមាថា ពិតដល់ $n=k$ គឺ $(1+x)^k\geq 1+kx+\dfrac{k(k-1)x^2}{2}$

ស្រាយថា វិសមភាពពិតចំពោះ $n=k+1$ គឺ

$(1+x)^{k+1}\geq 1+(1+k)x+\dfrac{k(k+1)x^2}{2}$

យើងមាន: $(1+x)^k\geq 1+kx+\dfrac{k(k-1)x^2}{2}$

នាំអោយ $(1+x)(1+x)^k\geq (1+x)\left[1+kx+\dfrac{k(k-1)x^2}{2}\right]$

នាំអោយ $(1+x)^{k+1}\ge 1+kx+\frac{k(k-1)x^2}{2}+x+kx^2+\frac{k(k-1)x^3}{2}$

នាំអោយ $(1+x)^{k+1}\ge 1+(k+1)x+\frac{k^2x^2-kx^2+2kx^2}{2}+\frac{k(k-1)x^3}{2}$

នាំអោយ $(1+x)^{k+1}\ge 1+(k+1)x+\frac{k(k+1)x^2}{2}+\frac{k(k-1)x^3}{2}$ ពិត

ដូចនេះ $(1+x)^n\ge 1+nx+\frac{n(n-1)x^2}{2}$

49. ស្រាយថា$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(1+2+3+\cdots+n)\ge n^2$ គ្រប់ $n\in IN$

ដោយប្រើវិធីអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ។

ស្រាយបញ្ជាក់

- ស្រាយថា$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(1+2+3+\cdots+n)\ge n^2$

បើ $n=1$ នាំអោយ $1\ge 1$ ពិត

ឧបមាថា $n=k$ ពិត យើងបាន:

$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)(1+2+3+\cdots+k)\ge k^2$

ស្រាយថា $n=k+1$ ពិត

បើ $n=k+1$

យើងបាន:

$\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{1}{k+1}\right)\right]\left[(1+2+3+\cdots+k)+(k+1)\right]\ge (k+1)^2$

រឺ $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}\right)(1+2+3+\ldots+k)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}\right)(k+1)$

$$+\left(\frac{1}{k+1}\right)(1+2+3+\ldots+k)+1\geq k^2+2k+1$$

ឬ $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}\right)(1+2+3+\ldots+k)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}\right)(k+1)$

$$+k\left(\frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{k+1}{2}\right)\geq k^2+2k$$

ឬ $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)(1+2+3+\cdots+k)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)(k+1)$

$+\frac{k}{2}\geq k^2+2k$ (1)

ដោយ $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)(1+2+3+\cdots+k)\geq k^2$

$$k\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\left(\frac{k+1}{2}\right)\geq k^2$$

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)(k+1)\geq 2k$$

$\frac{k}{2}>0$ ព្រោះ $k\in IN$

នាំអោយ

$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)(1+2+3+\cdots+k)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)(k+1)$

$$+\frac{k}{2}>k^2+2k$$

នាំអោយ (1) ពិត

ដូចនេះ $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)(1+2+3+\cdots+k)\geq k^2$ គ្រប់ $n\in IN$

50. ស្រាយថាៈ ផលបូកនៃលេខមេគុណក្នុងពន្លាត $(1+x)^n$ ស្មើនឹង 2^n ។

ស្រាយបញ្ជាក់

- ស្រាយថា: ផលបូកនៃលេខមេគុណក្នុងពន្លាត $(1+x)^n$ ស្មើនឹង 2^n

យក S_n ផលបូកនៃលេខមេគុណក្នុងពន្លាត $(1+x)^n$

តាមទ្រឹស្តីបទទ្វេធាយើងបាន:

$$(1+x)^n = C(n,0)+C(n,1)x+C(n,2)x^2+\ldots+C(n,n-1)x^{n-1}+C(n,n)x^n$$

នាំអោយ $S_n = (n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\ldots+C(n,n)$ （1）

ដោយ $2^n = (1+1)^n = (n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\ldots+C(n,n)$ （2）

តាម （1）និង（2）យើងបាន: $S_n = 2^n$

ដូចនេះ ផលបូកនៃលេខមេគុណក្នុងពន្លាត $(1+x)^n$ *ស្មើនឹង* 2^n

51. ស្រាយថា: $C(n,0)+C(n,2)+C(n,4)+\ldots+C(n,n-1)$

$$= C(n,1)+C(n,3)+C(n,5)+\ldots+C(n,n) = 2^{n-1}$$

ដែល $C(n,0)$, $C(n,1)$, . . ., $C(n,n)$ ជាលេខមេគុណក្នុងពន្លាត $(1+x)^n$

ហើយ n ជាចំនួនគត់សេស ។

ស្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន:

$$(1+x)^n = C(n,0)+C(n,1)x+C(n,2)x^2+\ldots+C(n,n-1)x^{n-1}+C(n,n)x^n$$

បើ $x=-1$ យើងបាន:

$$(1-1)^n = C(n,0)(-1)^0+C(n,1)(-1)^1+\ldots+C(n,n-1)(-1)^{n-1}+C(n,n)(-1)^n$$

ដោយ n ជាចំនួនគត់សេស

នាំអោយ

$$C(n,0)-C(n,1)+C(n,2)-C(n,3)+\ldots+C(n,n-1)-C(n,n)=0$$

នាំអោយ $C(n,0)+C(n,2)+C(n,4)+...+C(n,n-1)$

$$=C(n,1)+C(n,3)+C(n,5)+...+C(n,n)$$

ផលបូកលេខមេគុណនៃពន្លាត $(1+x)^n$ ស្មើ 2^{n-1}

នាំអោយ $S_1+S_2=2^n$,

$S_1=C(n,0)+C(n,2)+C(n,4)+...+C(n,n-1)$

ហើយ $S_2=C(n,1)+C(n,3)+C(n,5)+...+C(n,n)$

នាំអោយ $2S_1=2^n$ នាំអោយ $S_1=2^{n-1}$

នាំអោយ $C(n,0)+C(n,2)+C(n,4)+...+C(n,n-1)=2^{n-1}$

ដូចនេះ $C(n,0)+C(n,2)+C(n,4)+...+C(n,n-1)$

$$=C(n,1)+C(n,3)+C(n,5)+...+C(n,n)=2^{n-1}$$

គណិតវិទ្យា

ទំនាក់ទំនងជាវដុំ និង រាយតាមរយៈលេខទូរស័ព្ទ

086 46 23 86

សូមអរគុណចំពោះការគាំទ្ររបស់ប្រិយមិត្តទាំងអស់សម្រាប់ សៀវភៅ ពិភពជម្រើសលំហាត់ស៊ីត ភាគ1 នេះ ។ យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា ប្រិយមិត្តទាំងអស់នឹងបន្តគាំទ្រ សៀវភៅ ពិភពជម្រើសលំហាត់ស៊ីត ភាគ2 ដែលគ្រងចេញក្នុងពេលឆាប់ៗនេះជាបន្តទៀត ។